

Grundzüge der Mengenlehre – Historische Einführung

W. Purkert¹

Inhalt:

Einleitung

1. Hausdorffs Weg zu seinem Hauptwerk
 - 1.1 Hausdorffs Hinwendung zur Mengenlehre
 - 1.2 Vom Studium der Ordnungstypen zu den *Grundzügen der Mengenlehre*
2. Monographien und Lehrbücher zur Mengenlehre bis 1914
 - 2.1 Cantors *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*
 - 2.2 Erste französische Monographien
 - 2.3 Die Göttinger Schule. Schoenflies' erster Bericht
 - 2.4 Hausdorff über Russells *The Principles of Mathematics*
 - 2.5 Die Bücher von Hessenberg, Young, Hobson und Shegalkin
 - 2.6 Schoenflies' Bericht von 1908. Sierpińskis *Zarys teorii mnogości*
 - 2.7 Schoenflies' Buch von 1913 im Vergleich mit Hausdorffs *Grundzügen*
3. Zur Rezeption der *Grundzüge der Mengenlehre*
 - 3.1 Allgemeine Bemerkungen. Die *Fundamenta Mathematicae*
 - 3.2 Lehrbücher der allgemeinen Mengenlehre und der allgemeinen Topologie nach 1914
 - 3.3 Hausdorff und Bourbaki
 - 3.4 Zur Aufnahme mengentheoretisch-topologischer Methoden in die Analysis Situs und geometrische Topologie
 - 3.5 Schlußbemerkungen

¹Abschnitt 3.4 wurde von E. BRIESKORN und E. SCHOLZ verfaßt. Für Hinweise auf einschlägige Literatur und für Verbesserungsvorschläge danke ich den Herren BRIESKORN, EPPLE, FELGNER, HERRLICH, PREUSS, REMMERT, SCHOLZ und ULLRICH.

Einleitung

It would be difficult to name a volume in any field of mathematics, even in the unclouded domain of number theory, that surpasses the *Grundzüge* in clearness and precision.²

Im Frühjahr 1914 erschien bei Veit & Co. in Leipzig ein Buch, welches unbestritten zu den Klassikern der mathematischen Literatur zählt, FELIX HAUSDORFFS *Grundzüge der Mengenlehre*³. Dieses Werk hat zahlreiche Mathematiker in die Mengenlehre und insbesondere in CANTORS Theorie der transfiniten Zahlen eingeführt, welche DAVID HILBERT (1862–1943) „als die bewundernswerteste Blüte mathematischen Geistes und überhaupt eine der höchsten Leistungen rein verstandesmäßiger menschlicher Tätigkeit“⁴ bezeichnet hat. Es enthielt auch eine Zusammenfassung von HAUSDORFFS grundlegenden Beiträgen zur Theorie geordneter Mengen und seine wohl einflußreichste Schöpfung, die Theorie der topologischen Räume, mit der eine neue mathematische Disziplin, die allgemeine Topologie⁵, begründet wurde.

In der folgenden Einführung zum Text der *Grundzüge* wird zunächst auf HAUSDORFFS Hinwendung zur Mengenlehre, seine Bekanntschaft mit GEORG CANTOR (1845–1918) und seinen Weg bis zur Niederschrift des Buches eingegangen. Dazu ist die Quellenlage leider nur sporadisch und man ist oft auf Indizien angewiesen. Es wird dann versucht, die *Grundzüge* in den historischen Kontext der Entwicklung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen einzuordnen und einen Vergleich mit zeitgenössischen Lehrbüchern und Monographien anzustellen. Die Einführung schließt mit Bemerkungen zur Rezeption der *Grundzüge* und zu ihrer Bedeutung für die moderne Mathematik.

1. Hausdorffs Weg zu seinem Hauptwerk

1.1 Hausdorffs Hinwendung zur Mengenlehre

Über HAUSDORFFS Studien (SS 1887–WS 1887/88: Leipzig; SS 1888: Freiburg i. Br.; WS 1888/89: Berlin; SS 1889–SS 1891: Leipzig) sind wir durch Studienzeugnisse (außer für das Freiburger Semester) sowie durch die im Nachlaß ziemlich vollständig vorhandenen Vorlesungsmitschriften recht gut orientiert. Danach ist es kaum anzunehmen, daß HAUSDORFF während des Studiums mit Ideen der Mengenlehre bekannt gemacht worden ist; insbesondere hat er Vorlesungen über Funktionentheorie oder Fourierreihen, in denen dies damals hätte

²[Bl 1920], S. 116. S. diesen Band, S. 844–853

³[H 1914a].

⁴[Hi 1925], S. 167

⁵Die allgemeine Theorie der topologischen Räume und stetigen Abbildungen wurde oft als mengentheoretische Topologie bezeichnet. In neuerer Zeit hat sich eine Begriffsverschiebung angebahnt: „set theoretic topology“ bezeichnet das weite Feld der Verbindungen von Topologie und metamathematischen Methoden (einen guten Einblick gibt die Monographie [Ru 1975]; s. auch [Dow 1992]), während die alte mengentheoretische Topologie früher gelegentlich und heute durchweg als „general topology“ bezeichnet wird.

am ehesten geschehen können, nie gehört. Während seiner letzten Semester in Leipzig schloß er sich eng an den angewandten Mathematiker und Astronomen HEINRICH BRUNS (1848–1919) an, bei dem er 1891 mit einer Arbeit über die Refraktion des Lichtes in der Atmosphäre⁶ promovierte. Es folgten zwei weitere Arbeiten zu diesem Thema⁷ und 1895 die Habilitation mit einer Schrift über die atmosphärische Extinktion⁸. Vor seiner Habilitation hatte HAUSDORFF von Februar 1893 bis Februar 1895 als Rechner auf der Leipziger Sternwarte gearbeitet. Auch die bis 1897 noch publizierten Arbeiten, eine Arbeit zur Optik⁹ und eine zur Wahrscheinlichkeitsrechnung¹⁰, lagen von der Thematik her noch ganz in der Interessensphäre von BRUNS. HAUSDORFF hatte zwar in einem Brief an SOPHUS LIE (1842–1899)¹¹ schon im März 1894 angedeutet, daß er sich mehr zur reinen Mathematik hingezogen fühle als zur Astronomie, in der wissenschaftlichen Öffentlichkeit galt er aber 1897 noch als angewandter Mathematiker und Astronom, denn als im November 1897 in Göttingen ein Extraordinariat für theoretische Astronomie und Geodäsie zu besetzen war, wurde er in einem Brief der Fakultät vom 25.11.1897 an das Preussische Kultusministerium *secundo loco* genannt¹².

Daß sich ein Gelehrter mit diesem Hintergrund der Mengenlehre zuwendet, erscheint zunächst überraschend, zumal sich vor 1900 nur wenige Mathematiker mit diesem Gebiet beschäftigten. Man kann mit einiger Sicherheit vermuten, daß es vor allem philosophische Fragestellungen waren, die HAUSDORFFS Interesse an der Mengenlehre weckten. In seinem 1897 unter dem Pseudonym PAUL MONGRÉ erschienenen Aphorismenband *Sant' Ilario. Gedanken aus der Landschaft Zarathustras*¹³ gibt es ein Kapitel „Zur Kritik des Erkennens“. Dort setzt sich HAUSDORFF im Aphorismus Nr. 406 (S. 349 ff.) mit einem problematischen Argument NIETZSCHES für die ewige Wiederkehr des Gleichen auseinander. NIETZSCHE hatte in Aufzeichnungen, die man in seinem Nachlaß fand, argumentiert, daß die Zeit unendlich sei, der Zeitinhalt jedoch aus ungeheuer vielen, aber eben nur endlich vielen verschiedenen Atomkombinationen bestehe, woraus die ewige Wiederholung von Zeitstrecken mit gleichem Inhalt folge. Den Schubfachsluß NIETZSCHES erkennt HAUSDORFF in seinem Aphorismus als richtig an, die Voraussetzung endlichen Zeitinhalts jedoch sei falsch, vielmehr sei der Zeitinhalt ebenfalls eine unendliche Größe, „und zwar eine viel umfassendere, umfänglichere, eine Unendlichkeit *höherer Dimension*.“¹⁴ Dann heißt es weiter:

Ohne diese der Mathematik entlehnte Unterscheidung der Mannig-

⁶[H 1891].

⁷[H 1893] (in zwei Teilen).

⁸[H 1895].

⁹[H 1896].

¹⁰[H 1897a].

¹¹Nachlass LIE. Universitätsbibliothek Oslo, Håndskriftsamlingen. In: [ETh 1994], S. 64–65.

¹²Geheimes Staatsarchiv Preussischer Kulturbesitz. Rep. 76 Va, Sekt. 6, Tit. IV. Die Anstellung und Besoldung der Professoren der philosophischen Fakultät der Universität zu Göttingen, Vol. XVI 1895–1897, Bl. 6v. Zitiert nach [I 1985].

¹³[H 1897b], abgedruckt im Bd. VII dieser Edition.

¹⁴[H 1897b], S. 350.

faltigkeiten verschiedener Dimension, der Unendlichkeiten verschiedenen Rangs und Umfangs sollte sich Niemand an erkenntnistheoretische Dinge heranwagen; wie will man mit der Unendlichkeit umgehen, wenn man in ihr bloss summarisch den Gegensatz des Endlichen, nicht auch innerhalb ihrer die Stufen und Grade des Unendlichen unterscheiden kann.¹⁵

HAUSDORFF selbst beschäftigte sich intensiv mit erkenntnistheoretischen Fragen – 1898 erschien sein erkenntniskritischer Versuch *Das Chaos in kosmischer Auslese*¹⁶. Folgte HAUSDORFF seiner oben zitierten Maxime, so mußte ihn die Mengenlehre CANTORS, welche die verschiedenen Grade des Unendlichen durch transfiniten Zahlen zu quantifizieren vermochte, brennend interessieren. Der zitierte Aphorismus läßt jedoch erkennen, daß HAUSDORFF zum Zeitpunkt der Niederschrift CANTORS Theorie noch nicht kannte, denn er sieht darin die verschiedenen Stufen und Grade des Unendlichen noch in der verschiedenen Dimension von Punktengen: So seien in einer Linie ∞^2 , in einer Fläche ∞^3 Punkte enthalten. Das zunächst paradox erscheinende Resultat, daß \mathbb{R}^n und \mathbb{R}^m für $n \neq m$ gleichmächtig sind, hatte CANTOR schon 1878 bewiesen¹⁷. Der *Sant' Ilario* wurde im Wintersemester 1896/97 an der ligurischen Küste vollendet, als HAUSDORFF die Folgen einer Krankheit auskurierte. Dies führt uns zu der These, daß HAUSDORFF Anfang 1897 die Mengenlehre noch nicht kannte. Unsere These wird durch ein undatiertes Fragment gestützt, welches nach Insatzgabe des *Sant' Ilario* geschrieben worden sein muß. Dort heißt es:

[...] die Beispiele von G. Cantor und G. Peano zeigen aber, dass wenn man auf eineindeutige *stetige* Zuordnung verzichtet, die Punkte einer Fläche, eines Würfels, einer begrenzten Mannigfaltigkeit von n Dimensionen den Punkten einer Strecke zugeordnet werden können. Cantors Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Hiernach meine Bemerkungen über Nietzsches ewige Wiederkunft zu revidieren. [NL HAUSDORFF: Kapsel 49: Fasz. 1076, Bl. 52]

1898, im *Chaos in kosmischer Auslese*, zeigt sich HAUSDORFF bei der gleichen Problematik über die mengentheoretischen Zusammenhänge vollkommen orientiert. Es heißt dort:

Jedenfalls werden alle Versuche, auf rein *speculativem* Wege für oder gegen die ewige Wiederkehr zu entscheiden, an der Klippe scheitern, die den Deductionen a priori gefährlich zu werden pflegt. Hierzu rechne ich auch Nietzsches eigenen, im Nachlass veröffentlichten Versuch, die Nothwendigkeit der Wiederkunft auf die ganz unhaltbare Behauptung zu stützen, dass die Menge der Weltzustände endlich, die der Zeitpunkte unendlich sei und dass also der endliche Weltinhalt in der unendlichen Zeit unendlich oft wiederholt werden müsse, um sie vollständig auszufüllen. Die Zeit ist linear, der Inbegriff aller Weltzustände aber liesse sich bereits

¹⁵Ebd.

¹⁶[H 1898a].

¹⁷[Ca 1878]. Die Auffassung, Punktengen verschiedener Dimension im Hinblick auf die Gesamtheit ihrer Punkte Unendlichkeiten verschiedenen Grades zuzuweisen, war unter Mathematikern weit verbreitet, solange sie CANTORS Resultat noch nicht kannten. Siehe dazu [Jo 1979], S. 133.

bei der einfachsten, rein materialistischen Auffassung als Punktcontinuum von unendlich vielen Dimensionen darstellen – kann also nicht in *stetiger* Weise innerhalb der Zeit untergebracht werden. Verzichtet man auf die Stetigkeit der Zuordnung, so muss man freilich einen Schritt weitergehen und im Sinne der Cantor'schen Mannigfaltigkeitslehre zeigen, dass die Menge aller Weltzustände von höherer *Mächtigkeit* ist als das Linearcontinuum; es genügt hierzu, beiläufig gesagt, als Theil des Weltinhalts einen flüssigen Körper zu denken, der bei beliebiger Bewegung seiner Theile auch in beliebiger Weise zerfallen und zerreißen kann.¹⁸

Im *Chaos in kosmischer Auslese* wird an einer Reihe weiterer Stellen eine Verbindung von philosophischer Argumentation mit mengentheoretischen Begriffen und Sätzen hergestellt (z.B. S. 81–82, S. 122, S. 145–146, S. 157–158); HAUSDORFF zeigt sich hier überall mit CANTORS Theorie wohlvertraut.

Es ist nicht bekannt, wann HAUSDORFF das „Chaos“ geschrieben hat – die Grundidee geht vermutlich schon auf seine Studentenzeit zurück.¹⁹ Aber auch hier ist vor der Drucklegung eine sorgfältige Endredaktion erfolgt, wie aus einem Brief an HEINRICH KÖSELITZ (PETER GAST) vom 12.10.1898 hervorgeht. Dort heißt es im Hinblick auf *Das Chaos in kosmischer Auslese*:

Mein neues Buch, das Sie dieser Tage empfangen, möge mich bei Ihnen noch nicht um den Ruf eines Oligographen bringen; seine eigentliche Entstehung liegt, wie die des S. Ilario, um Jahre zurück. Die diesmalige, gedruckte Niederschrift ist, schlecht gerechnet, die dritte, und wenn ich mir nicht endlich Zwang angethan und das Manuscript abgestossen hätte, wäre es vielleicht einer nochmaligen Umarbeitung anheimgefallen.²⁰

Die letzte Redaktion des *Chaos* dürfte also mit Sicherheit in das Jahr 1898 gefallen sein.

All dies macht es wahrscheinlich, daß sich HAUSDORFF etwa 1897/98 eingehend mit der Mengenlehre vertraut gemacht hat. Zunächst mag das philosophische, insbesondere erkenntnistheoretische Interesse daran überwogen haben, aber spätestens 1901 wandte sich HAUSDORFF der Mengenlehre auch forschend und lehrend zu, nachdem er vorher noch über nichteuklidische Geometrie, hyperkomplexe Zahlensysteme und Wahrscheinlichkeitstheorie publiziert hatte.²¹

Die *Grundzüge der Mengenlehre* sind „dem Schöpfer der Mengenlehre Herrn GEORG CANTOR in dankbarer Verehrung gewidmet.“²² Wir wissen nicht, wann sich CANTOR und HAUSDORFF erstmals persönlich begegnet sind. Die erste Quelle, die eine Unterredung dokumentiert, stammt aus dem Jahr 1901 (s.u.). Vieles spricht aber für eine frühere persönliche Bekanntschaft. So nahmen CANTOR und HAUSDORFF im August 1897 am ersten internationalen Mathematikerkongreß in Zürich teil.²³ Dieser Kongreß brachte durch den Hauptvortrag

¹⁸[H 1898a], S. 193–194.

¹⁹E. BRIESKORN fand entsprechende Hinweise in NL HAUSDORFF, Kapsel 54, Fasz. 1153.

²⁰Quelle: Nietzsche-Archiv Weimar.

²¹[H 1899a], [H 1900b], [H 1901a].

²²[H 1914a], S. III.

²³[Rud 1898], S. 67, S. 69.

von ADOLF HURWITZ²⁴ (1859–1919) der Mengenlehre und CANTOR persönlich internationale Anerkennung. HURWITZ konnte aber offenbar noch nicht davon ausgehen, daß den Teilnehmern CANTORS Ideen geläufig waren, denn er erläuterte recht ausführlich die benötigten Grundlagen aus der Theorie der transfiniten Zahlen und deren Anwendung auf Punktmengen (CANTORSches Haupttheorem, Satz von CANTOR-BENDIXSON). Auch der kurze Vortrag von JAQUES HADAMARD²⁵ (1865–1963), in dem dieser die Notwendigkeit betonte, mengentheoretische Betrachtungen nicht nur auf Punktmengen, sondern auch auf Funktionenmengen anzuwenden, deutete auf die Wichtigkeit der Mengenlehre hin.

Zu regelmäßigen persönlichen Begegnungen zwischen CANTOR und HAUSDORFF ist es vermutlich im sogenannten mathematischen Kränzchen gekommen, zu dem sich Mathematiker der Universitäten Leipzig und Halle von Zeit zu Zeit trafen. Über die Existenz dieses Kränzchens sind wir durch ein Beförderungsgesuch des Hallenser Schuldirektors HEINRICH SCHOTTEN vom 3. Februar 1904 informiert; es heißt dort:

Seit Herbst 1896 bin ich Direktor der städtischen Oberrealschule zu Halle a.S. und bin gleich anfangs auch in Beziehung zu den hiesigen Fachprofessoren getreten, wurde auch Mitglied des sogenannten mathematischen Kränzchens, einer Vereinigung Hallenser und Leipziger Professoren, die abwechselnd in Halle und Leipzig wissenschaftliche Sitzungen – etwa zwei im Semester – abhält.²⁶

Auch in der Autobiographie *Bestand und Wandel* von GERHARD KOWALEWSKI (1876–1950) finden sich Bemerkungen zum mathematischen Kränzchen:

Zwischen Halle und Leipzig gab es eine sehr schöne Vereinbarung. Die Mathematiker beider Universitäten hatten ein gemeinsames mathematisches Kränzchen, das alle 14 Tage abwechselnd in Leipzig und Halle stattfand. Die älteren Leipziger Herren nahmen nicht daran teil. Dagegen erschienen Otto Hölder, der Nachfolger Lies, und Engel sowie die drei Privatdozenten ganz regelmäßig. Von den Hallensern wirkten mit Georg Cantor, [. . .], Hermann Graßmann der Jüngere, [. . .], sowie einige Gymnasialprofessoren.²⁷

Über CANTOR heißt es weiter: „Oft lud er das ganze Kränzchen in sein Haus ein.“²⁸ Daß CANTOR nicht nur in Halle am Kränzchen teilnahm, sondern auch zu Sitzungen nach Leipzig fuhr, ersieht man z. B. aus einer Postkarte an F. ENGEL vom 29.11.1901. Dort heißt es:

Lieber College. Der 14^{te} Dez. als Kränzchentag für Leipzig würde mir durchaus passen und freue ich mich auf die Aussicht, wieder einmal mit

²⁴HURWITZ, A. *Über die Entwicklung der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen in neuerer Zeit*. In: [Rud 1898], S. 91–112.

²⁵HADAMARD, J.: *Sur certaines applications possibles de la théorie des ensembles*. In: [Rud 1898], S. 201–202.

²⁶Geheimes Staatsarchiv Preussischer Kulturbesitz, I. HA Rep. 76 Va, Sekt. 8, Tit. IV, Nr. 34, Bl.24.

²⁷[Kow 1950]. S. 106.

²⁸Ebd.

Ihnen Allen zusammen zu sein. Grassmann habe ich Mittheilung hiervon gemacht.²⁹

In ihren philosophischen Ansichten waren CANTOR und HAUSDORFF denkbar verschieden: auf der einen Seite der Metaphysiker CANTOR, für den KANT die Inkarnation skeptizistischen Irrtums war und der meinte, seine transfiniten Zahlen würden „in intellectu Divino im höchsten Grade der Realität existieren“³⁰, auf der anderen Seite HAUSDORFF, der im *Chaos in kosmischer Auslese* jede Metaphysik endgültig destruieren wollte; hier der bekennende Christ CANTOR, der NIETZSCHE „im Hinblick auf den perversen Inhalt und die herostratisch-antichristlichen Motive“ in dessen Schriften „Verderbniss der Jugend. . . im großen Stile“ anlastete³¹, dort HAUSDORFF, der in der Selbstanzeige seines *Sant’Ilario* schrieb, daß jeder, der „ihn einfach zum Gefolge NIETZSCHES zählen will“, sich auf sein „eigenes Geständnis berufen“ möge³² (wobei er gegenüber dem späten NIETZSCHE durchaus kritische Distanz zu wahren wußte). Auf der einen Seite schließlich – wenn wir von der Philosophie zur Literatur wechseln – der Mann, der mit tiefem Ernst und großem Eifer die BACON-SHAKESPEARE-Theorie verfocht³³, auf der anderen Seite der Verfasser ironischer Aphorismen, der im *Sant’ Ilario* diese Theorie verspottete und lächerlich machte.³⁴ Der 23 Jahre jüngere und im persönlichen Umgang zurückhaltende und taktvolle HAUSDORFF wird es tunlichst vermieden haben, mit CANTOR über Philosophie oder über die BACON-SHAKESPEARE-Theorie zu streiten. Umso interessanter war für ihn am Beginn seiner mengentheoretischen Schaffensphase der Mathematiker CANTOR, der mit seinem Diktum von der Freiheit der mathematischen Gedankenbildung auch vollständig HAUSDORFFS Vorstellungen vom mathematischen Schaffensprozeß traf³⁵, selbst wenn für beide die Gründe für diese Forderung wiederum denkbar verschieden waren.

1.2 Vom Studium der Ordnungstypen zu den *Grundzügen der Mengenlehre*

Ein erster Beleg für eine Anregung, die HAUSDORFF mündlich von CANTOR erhielt, findet sich im Manuskript der Vorlesung über Mengenlehre³⁶, die HAUSDORFF im Sommersemester 1901 in Leipzig vor 3 Zuhörern hielt.³⁷ Es war dies eine der ersten Vorlesungen über Mengenlehre überhaupt, nur ERNST ZERMELOS (1871–1953) Kolleg in Göttingen im Wintersemester 1900/1901 war

²⁹NL ENGEL. Math. Institut der Universität Gießen. Ich verdanke den Hinweis darauf Herrn P. ULLRICH.

³⁰Brief CANTORS an CH. HERMITE vom 30.11.1895. Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, NL CANTOR, Nr. 18, S. 47–48. In: [PuI 1987], S. 105.

³¹Brief CANTORS an den Hallenser Kirchenhistoriker FRIEDRICH LOOFS vom 24.2.1900. In: [Mes 1967], S. 265.

³²[H 1897c], S. 361.

³³[PuI 1987], S. 79–92.

³⁴[H 1897b], Aph. Nr. 306, S. 204–206.

³⁵[H 1903a], S. 3.

³⁶NL HAUSDORFF: Kapsel 03: Fasz. 12. Abgedruckt im Band I dieser Edition.

³⁷Archiv der Univ. Leipzig, PA 547, Bl.10–12.

früher³⁸; CANTOR selbst hat nie über Mengenlehre gelesen.³⁹ HAUSDORFF beweist in der Vorlesung den Satz, daß die Typenklasse $T(\aleph_0)$ aller abzählbaren Ordnungstypen die Mächtigkeit \aleph des Kontinuums hat. Der Beweis verläuft nach dem DEDEKIND-BERNSTEINSchen Äquivalenzsatz, indem gezeigt wird:

- a) eine Teilmenge abzählbarer Typen ist dem Continuum äquivalent.
- ...
- b) Eine Teilmenge des Continuum ist der Klasse der abzählbaren Typen äquivalent.⁴⁰

Am oberen Rand des Blattes 37 hat HAUSDORFF mit Rotstift eingefügt:

- a) nach mündlicher Mitteilung von Cantor,
 - b) von mir selbst. Vorgetragen 27.6.1901.
- Dissertation von F. Bernstein empfangen 29.6.1901.⁴¹

In der Vorlesung trennt HAUSDORFF sorgfältig die beweisbaren Sätze der Mengenlehre, deren Beweise auch alle genau ausgeführt werden, von den Sätzen, die CANTOR vermutet hatte, aber nicht beweisen konnte. HAUSDORFF nennt sie Postulate und formuliert sie folgendermaßen:

- II. Postulat: Die Mächtigkeit des Continuum ist gleich der der zweiten Zahlenklasse.⁴²
- III. Postulat: Jede wohldefinierte Menge kann in die Form einer wohlgeordneten Menge gebracht werden.⁴³

Ein Postulat I. behauptete die Vergleichbarkeit der Kardinalzahlen und ist richtig, wenn III. richtig ist. II. ist die Cantorsche Kontinuumhypothese, bzw., als Frage nach dem Platz von \aleph in der Reihe der \aleph_α , das Kontinuumproblem. Dieses Problem war das erste in der Liste jener 23 Probleme, die D. HILBERT auf dem internationalen Mathematikkongreß 1900 in Paris den Mathematikern im neuen Jahrhundert zur Lösung unterbreitet hatte, und es hatte dadurch einen besonderen Rang bekommen. HAUSDORFF hat sich jahrzehntelang für dieses Problem interessiert; noch im Sommer 1938 fertigte er eine sorgfältige 78 Seiten umfassende Ausarbeitung zu [Si 1934a] mit Vereinfachungen einiger Beweise und kritischen Bemerkungen an.⁴⁴ HAUSDORFFs Einstieg in ein gründliches Studium geordneter Mengen war nicht zuletzt durch das Kontinuumproblem motiviert, sah er doch in dem Satz über die Mächtigkeit von $T(\aleph_0)$ eine Strategie, dieses Problem anzugreifen. In seiner ersten mengentheoretischen Publikation kommt das ganz klar zum Ausdruck:

In dem von G. CANTOR erschlossenen Gebiete der Ordnungstypen ist es eigentlich nur das Specialgebiet der Ordnungszahlen, in dem wir einigermassen Bescheid wissen; über die allgemeinen Typen, die Typen nicht wohlgeordneter Mengen, ist äusserst wenig bekannt. Und doch

³⁸[P 1991], S. 82.

³⁹[Ker 1983], S. 89–94 und Geheimes Staatsarchiv Preussischer Kulturbesitz, Rep. 76 Va, Sekt. 8, Tit. IV, Bd. III (1917), Bl. 245–246.

⁴⁰NL HAUSDORFF: Kapsel 03: Fasz. 12, Bl. 37.

⁴¹FELIX BERNSTEIN (1878–1956) hatte in seiner Dissertation die Behauptung b) ebenfalls bewiesen.

⁴²Ebd. Bl. 46.

⁴³Ebd., Bl. 47.

⁴⁴NL HAUSDORFF: Kapsel 42: Fasz. 729.

gehört eine genauere Kenntniss und Classification der Typen zu dem engeren Problemkreise der Mengenlehre: schon desshalb, weil die alte Frage nach der Mächtigkeit des Continuum auf diesem Wege möglicherweise der Lösung näher gebracht werden kann. Denn da nach einem CANTOR-BERNSTEIN'schen Satze¹⁾ die Mächtigkeit der zweiten *Typen*klasse (der Klasse der abzählbaren Typen) gleich der Mächtigkeit \aleph des Continuum²⁾ ist, während die Mächtigkeit der zweiten *Zahlen*klasse mit \aleph_1 bezeichnet wird, so dürfte es für die Vergleichung zwischen \aleph und \aleph_1 von Wichtigkeit sein, etwaige Zwischenstufen festzulegen, d. h. unter der Gesamtheit aller abzählbaren Mengen eine engere Gruppe herauszugreifen, in der ihrerseits die Gesamtheit der abzählbaren wohlgeordneten Mengen als Theil enthalten ist. Gerade die CANTOR'sche Vermuthung, dass $\aleph = \aleph_1$, verspricht eine Erleichterung des Beweises durch Einschaltung von Zwischenstufen, während umgekehrt, falls $\aleph > \aleph_1$ sein sollte, dieser Weg eher ein Umweg sein dürfte.⁴⁵

Die Fußnote ¹⁾ weist auf BERNSTEIN'S Göttinger Dissertation hin, die zweite Fußnote ²⁾ ist ein weiteres Indiz für mündlichen Austausch zwischen CANTOR und HAUSDORFF, denn CANTOR hat öffentlich einen Beweis des Wohlordnungssatzes nirgends angekündigt; es heißt hier nämlich:

Diese vorläufige Bezeichnung (Aleph ohne Index) als präjudicirlich zu scheuen, liegt um so weniger ein Grund vor, als G. CANTOR den Beweis, dass jede transfinite Cardinalzahl in der „Reihe der Aleph“ vorkommen muss, nächstens zu publiciren gedenkt.⁴⁶

HAUSDORFF betrachtet in der in Rede stehenden Arbeit eine Klasse geordneter Mengen, die er gestuft nennt: In einer gestuften Menge sind zwei verschiedene Abschnitte einander nie ähnlich. Die Klasse der gestuften Mengen umfaßt die der wohlgeordneten Mengen. Die Menge aller abzählbaren gestuften Mengen hat die Mächtigkeit \aleph , so daß HAUSDORFF hier einen ersten Schritt in seinem eingangs formulierten Programm vorangekommen zu sein schien. Wir wissen heute, daß diese Strategie, das Kontinuumproblem zu lösen, ebensowenig zum Ziel führen kann wie CANTOR'S Strategie, welche darauf zielte, den Satz von CANTOR-BENDIXSON von den abgeschlossenen Mengen auf beliebige überabzählbare Punktmengen zu verallgemeinern. Diese CANTOR'sche Idee war der Keim für die Entwicklung der deskriptiven Mengenlehre, die in den zwanziger Jahren – eingeleitet durch ein Ergebnis von HAUSDORFF und PAUL ALEXANDROFF (1896–1982) aus dem Jahre 1916 – einen kräftigen Aufschwung nahm.⁴⁷

Das Kontinuumproblem und die Wohlordnungsfähigkeit des Continuum standen nach übereinstimmenden Berichten mehrerer Teilnehmer im Mittelpunkt der Diskussionen auf dem dritten internationalen Mathematikerkongreß, der vom 8. bis 13. August 1904 in Heidelberg stattfand. Das Teilnehmerverzeichnis führt CANTOR und HAUSDORFF als Teilnehmer auf.⁴⁸

⁴⁵[H 1901b], S. 460.

⁴⁶Ebd.

⁴⁷s. diesen Band, S. 773–787, ferner Bd. III dieser Edition.

⁴⁸[Kr 1905], S. 12 und 15.

Am 10. August hielt JULIUS KÖNIG (1849–1913) in der Sektion Arithmetik und Algebra des Kongresses den Vortrag „Zum Kontinuumproblem“. Dort bewies er zunächst, daß die Summe \mathfrak{a} einer aufsteigenden Folge von Kardinalzahlen die Ungleichung $\mathfrak{a}^{\aleph_0} > \mathfrak{a}$ erfüllt. Daraus folgt wegen $\aleph_{\beta+\omega} = \aleph_\beta + \aleph_{\beta+1} + \dots$ die Ungleichung

$$\aleph_{\beta+\omega}^{\aleph_0} > \aleph_{\beta+\omega} \quad . \quad (1)$$

Dieses Resultat setzte KÖNIG in Beziehung zu einer Alephrelation, die F. BERNSTEIN in seiner Dissertation angegeben hatte, nämlich

$$\aleph_\mu^{\aleph_\alpha} = \aleph_\mu \cdot 2^{\aleph_\alpha} \quad (2)$$

Wäre $\aleph = 2^{\aleph_0}$ ein Element der Alephreihe, etwa \aleph_β , so könnte man $\aleph_\mu = \aleph_{\beta+\omega}$ setzen und erhielte aus (2)

$$\aleph_{\beta+\omega}^{\aleph_0} = \aleph_{\beta+\omega} \aleph_\beta = \aleph_{\beta+\omega}$$

im Widerspruch zu (1). Demnach wäre die Mächtigkeit des Kontinuums in der Alephreihe nicht vorhanden, d.h. das Kontinuum ließe sich nicht wohlordnen und CANTORS Vermutung $\aleph = \aleph_1$ wäre widerlegt. Als Diskutanten zu diesem Vortrag vermerkt das Protokoll: G. CANTOR, D. HILBERT und ARTHUR SCHOENFLIES (1853–1928).

KÖNIGS Vortrag hat seinerzeit großes Aufsehen erregt, wäre doch mit diesem Resultat eine der Grundüberzeugungen CANTORS, nämlich die, daß man jede Menge wohlordnen könne, erschüttert worden, und das erste HILBERTSche Problem wäre gelöst gewesen. In der bereits erwähnten Autobiographie [Kow 1950] wird über KÖNIGS Vortrag und das Aufsehen, das er erregte, eingehend berichtet; dann heißt es:

Glücklicherweise stellte sich schon am nächsten Tag heraus, daß Königs Beweisführung unhaltbar war. Sie stützte sich auf ein Theorem von Felix Bernstein, das sich bei näherer Prüfung als falsch erwies. Zermelo, ein äußerst scharfsinniger und rasch arbeitender Denker, machte diese wichtige Feststellung.⁴⁹

Die Behauptung, daß der Fehler schon am Tag darauf entdeckt wurde und daß E. ZERMELO es war, der ihn entdeckte, ist falsch. KOWALEWSKI nahm am Kongreß gar nicht teil; eine Quelle für seine Schilderung nennt er nicht. Sein Bericht wäre deshalb in dieser Einführung der Erwähnung gar nicht wert, wenn er nicht in die Literatur zur Geschichte der Mengenlehre eingegangen wäre⁵⁰ und so seit Jahrzehnten das historische Bild mit bestimmt hätte. In Wirklichkeit war es FELIX HAUSDORFF, der bemerkte, daß man die Bernsteinsche Relation (2) nur für solche μ , die nicht Limeszahlen sind, beweisen kann. In [H 1904a] bewies er die Rekursionsformel

$$\aleph_\mu^{\aleph_\alpha} = \aleph_\mu \aleph_{\mu-1}^{\aleph_\alpha} \quad ,$$

die natürlich für Limeszahlen μ ihren Sinn verliert. Dann heißt es:

⁴⁹[Kow 1950], S. 202.

⁵⁰[Mes 1967], S. 165–166; [Mo 1982], S. 87; [PuI 1987], S. 161; [P 1991], S. 83; [O 1994], S. 11; [F 1999], S. 312, schon etwas relativiert: „it may well be that Kowalewski misremembered.“

Die von Herrn F. BERNSTEIN („Untersuchungen aus der Mengenlehre“, Diss. Halle 1901, S. 50) durch unbeschränkte Rekursion gewonnene Formel

$$\aleph_\mu^{\aleph_\alpha} = \aleph_\mu \cdot 2^{\aleph_\alpha}$$

ist also vorläufig als unbewiesen zu betrachten. Ihre Richtigkeit erscheint umso problematischer, als aus ihr, wie Herr J. KÖNIG gezeigt hat, das paradoxe Resultat folgen würde, daß die Mächtigkeit des Kontinuums kein Aleph sei, und daß es Kardinalzahlen gebe, die größer als jedes Aleph sind.⁵¹

Wenn ZERMELO in Heidelberg bereits darauf hingewiesen hätte, daß BERNSTEINs Formel für Limeszahlen μ nicht bewiesen ist, hätte HAUSDORFF sicher diese Passage nicht geschrieben oder zum mindesten ZERMELO erwähnt.

HAUSDORFFs Rolle bei der Aufklärung des KÖNIGschen Fehlschlusses geht auch deutlich aus dem Bericht hervor, den A. SCHOENFLIES 1922 von den Ereignissen in Heidelberg gegeben hat. Nach der Darstellung des KÖNIGschen Ergebnisses und der Ursache seines Fehlschlusses schreibt SCHOENFLIES:

An die Heidelberger Tagung schloß sich eine Art Nachkongreß in Wengen. HILBERT, HENSEL, HAUSDORFF und ich selbst fanden sich dort zufällig zusammen.⁵²

Es wird dann über die fieberhaften Bemühungen CANTORS berichtet, KÖNIG zu widerlegen. Danach heißt es:

Eine exakte Prüfung des Gültigkeitsbereichs der Bernsteinschen Alefrelation danken wir bekanntlich erst HAUSDORFF¹); sein Resultat, zu dem er schon in Wengen gelangte, bedingt die oben genannte Einschränkung des Theorems und damit die Entwertung der für das Kontinuum gezogenen Folgerung.⁵³

Übrigens hatte SCHOENFLIES schon 1905 darauf hingewiesen, daß HAUSDORFF in [H 1904a] den Gültigkeitsbereich der BERNSTEINschen Alefrelation wesentlich eingeschränkt hat.⁵⁴

Die Darstellung von SCHOENFLIES wird durch einen Brief HAUSDORFFs an HILBERT vom 29.9.1904 bestätigt; dort schreibt HAUSDORFF:

Nachdem das Continuumproblem mich in Wengen beinahe wie eine Monomanie geplagt hatte, galt hier mein erster Blick natürlich der Bernsteinschen Dissertation. Der Wurm sitzt genau an der vermuteten Stelle, S. 50: [...] Bernsteins Betrachtung giebt eine Recursion von $\aleph_{\mu+1}$ auf \aleph_μ , versagt aber für solche \aleph_μ , die keinen Vorgänger haben, also gerade für die Alephs, für die Herr J. König sie nothwendig braucht. Ich hatte in diesem Sinne, soweit ich es ohne Benutzung der Bernsteinschen Arbeit konnte, schon von unterwegs an Herrn König geschrieben, aber keine Antwort erhalten, bin also umso mehr geneigt, den König'schen Beweis für falsch und den König'schen Satz für den Gipfel des Unwahrscheinlichen

⁵¹[H 1904a], S. 571.

⁵²[Sch 1922], S. 100. SCHOENFLIES ist als Teilnehmer des Kongresses und der Nachsitzung in Wengen bei weitem glaubwürdiger als KOWALEWSKI.

⁵³Ebd., S. 101; ¹) verweist auf [H 1904a].

⁵⁴[Sch 1905], S. 186.

zu halten. Andererseits werden wohl auch Sie kaum den Eindruck gewonnen haben, dass Herr Cantor das, was er seit 30 Jahren vergeblich sucht, in den letzten Wochen gefunden haben sollte, und so scheint Ihr Problem Nr. 1 nach dem Heidelberger Congress genau dort zu stehen, wo Sie es auf dem Pariser Congress verlassen haben.

Aber vielleicht ist, während ich dies schreibe, doch schon eine der streitenden Parteien im Besitze der Wahrheit. Ich bin sehr gespannt auf die gedruckten Verhandlungen des Congresses.⁵⁵

KÖNIG selbst hat im Abdruck seines Vortrages im Kongreßbericht seinen Schluß, den er aus der BERNSTEINSchen Alephrelation gezogen hatte, ausdrücklich zurückgenommen. HAUSDORFF hat er dort nicht erwähnt.⁵⁶

In den Jahren 1906 und 1907 veröffentlichte HAUSDORFF seine Untersuchungen über Ordnungstypen mit zahlreichen neuen Ideen und Resultaten.⁵⁷ Eines der Ergebnisse ist der Beweis, daß die Typenklasse $T(\aleph_0)$ als Typenring die Basis $1, \omega, \omega^*, \eta$ hat. Der Beweis fußt auf HAUSDORFFs grundlegendem Theorem, daß jede geordnete Menge entweder zerstreut ist, d.h. keine dichte Teilmenge besitzt, oder Summe zerstreuter Mengen über ein dichtes Argument ist.⁵⁸ In einem Brief an HILBERT vom 8.8.1907 teilt CANTOR dieses Resultat mit, welches ihm HAUSDORFF am 19. Juli 1907 brieflich übermittelt hatte. In CANTORS Brief heißt es:

Es ist mir lieb, zu hören, daß Herr Zermelo erfolgreich an der Mengenlehre arbeitet. Grüßen Sie ihn bestens von mir. Ich halte auch die Arbeiten von Hausdorff in der Typentheorie für nützlich, gründlich und erfolgversprechend. Darum hatte ich bei der letzten Zusammenkunft der 3 Universitäten Leipzig, Jena und Halle in Kösen am 28. Juni mit ihm eine Besprechung verabredet und ihn zur Untersuchung einer Frage ange-regt, die er jetzt glücklich zu Ende gebracht zu haben scheint. Sie bezieht sich auf die Typenklasse von der Kardinalzahl \aleph_0 , d. h. auf die abzählbaren Typen; und ich war immer der Meinung, daß sie sich auf die drei Urtypen ω, ω^* und η und die endlichen Urtypen 1 und 2 durch Zusammensetzung zurückführen lassen. Dies findet nun durch Hausdorff, wie er mir am 19. Juli schrieb, in folgender Form Bestätigung.⁵⁹

In diesem speziellen Fall mag HAUSDORFF in der Tat eine Anregung CANTORS aufgegriffen haben. Im allgemeinen war er aber in den Arbeiten zur Typentheorie der Jahre 1906–1907 ein völlig selbständiger Forscher und nicht von CANTOR abhängig. Dies wird auch aus einem Brief HAUSDORFFs vom 24.5.1914 an F. ENGEL deutlich, in dem er sich zur Widmung der *Grundzüge* an CANTOR äußert:

Was Sie von CANTOR befürchten, muss ich vollkommen unterschreiben; ich glaube nicht, dass er seit 10 Jahren oder mehr an der Entwicklung

⁵⁵Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek zu Göttingen, Handschriftenabt., NL HILBERT, Nr. 136.

⁵⁶[Kr 1905], S. 147.

⁵⁷[H 1906b, 1907a, 1907b]; s. Band I dieser Edition. Zum Teil sind die Ergebnisse in die Kapitel IV und VI der *Grundzüge* eingegangen.

⁵⁸S. diesen Band, S. 195.

⁵⁹Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek zu Göttingen, Handschriftenabt., NL HILBERT, Nr. 54. In: [PuI 1987], S. 227.

der von ihm begründeten Wissenschaft noch activen oder auch nur receptiven Antheil nehmen kann. Dennoch hoffe ich, dass meine Widmung ihm wenigstens persönliche Freude gemacht hat; er hat mir zweimal ein paar Zeilen geschrieben, als ich ihn um Annahme der Dedication bat und dann nach Empfang des Buches.⁶⁰

Für CANTOR war HAUSDORFF nach dem Heidelberger Kongreß der wohl wichtigste Fortsetzer seines Werkes. Ihm lag ohne Zweifel daran, daß HAUSDORFFS Ergebnisse in der Typentheorie ein größeres internationales Publikum erreichten. Die Veröffentlichung der wichtigsten HAUSDORFFSchen Arbeiten in den Berichten der Königlich-Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig war nicht geeignet, breitere Kreise auf diese Arbeiten aufmerksam zu machen. CANTOR schlug HAUSDORFF deshalb vor, eine Zusammenfassung seiner Ergebnisse über Ordnungstypen in den Mathematischen Annalen zu veröffentlichen. HAUSDORFFS Brief an HILBERT vom 15.7.1907 dokumentiert diesen Vorgang; er ist aber auch noch in anderer Hinsicht sehr aufschlußreich:

Sehr geehrter Herr Geheimrath,

Herr Professor Cantor, mit dem ich vor 14 Tagen längere Zeit zusammen war, regte mich an, von meinen „Untersuchungen über Ordnungstypen“ ein knappes Exposé auszuarbeiten und Ihnen zum Abdruck in den Math. Annalen anzubieten. Er hielt es für wünschenswerth, dass die Sachen einem weiteren Leserkreise als dem der Leipziger Berichte unter die Augen kämen; auch ging er von der nicht unrichtigen Voraussetzung aus, dass die etwas lang gerathene Arbeit durch eine verkürzte, systematische und auf das Wesentlichste eingeschränkte Darstellung an Verständlichkeit gewinnen würde. [. . .] Ich erlaube mir also die Anfrage, ob Sie *principiell* geneigt wären, einen Artikel, etwa „Theorie der Ordnungstypen“ betitelt und im Umfange von 2-3 Bogen, in die Annalen aufzunehmen.

Sie finden vielleicht dies Ansinnen, über eine noch ungeschriebene Arbeit ein Votum abzugeben, etwas voreilig; natürlich soll es sich eben nur um eine principielle Erklärung handeln, die Sie nicht verpflichtet, sondern Ihnen seiner Zeit die Prüfung der wirklich vorliegenden Arbeit als unverkürztes Recht vorbehält. Nur möchte ich mir die Mühe sparen, falls etwa die Redaction der Annalen von vornherein das jetzt so vielfach (und mit so mittelalterlichen Waffen!) bestrittene Gebiet der Mengenlehre zu excludiren geneigt sein sollte. [. . .]

In der Hoffnung, dass Sie, sehr geehrter Herr Geheimrath, den von Poincaré todtgesagten „Cantorismus“ noch für einigermaßen lebendig halten und einer Arbeit, die der Mengenlehre inhaltlich etwas Neues hinzufügt, Ihr Interesse nicht versagen werden, bin ich

Ihr hochachtungsvoll ergebener

Felix Hausdorff⁶¹

Dieser Brief spiegelt die kritische Situation wider, in welche die Mengenlehre nach dem Heidelberger Kongreß und der Publikation von ZERMELOS erstem Beweis des Wohlordnungssatzes⁶² geraten war. Der zentrale Angriffspunkt war

⁶⁰NL ENGEL. Mathematisches Institut der Universität Gießen.

⁶¹Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek zu Göttingen, Handschriftenabt., NL HILBERT, Nr. 136.

⁶²[Z 1904].

das Auswahlaxiom⁶³, und als Damoklesschwert schwebten über dem Ganzen die Antinomien. HAUSDORFF selbst war – was seine Forschung betrifft – von den Angriffen gegen die Mengenlehre unbeeindruckt; ein schönes Zeugnis dafür ist außer o.g. Brief („mittelalterliche Waffen“) eine Postkarte von GERHARD HESSENBERG (1874–1925) an den Philosophen LEONARD NELSON (1882–1927) vom 20.9.1907 mit Impressionen von der DMV-Tagung im September 1907 in Dresden. Dort hatte HAUSDORFF über dichte Ordnungstypen vorgetragen.⁶⁴ HESSENBERG schreibt:

Ausgezeichnet hat mir ferner Hausdorff gefallen. Er ist der einzige produktive Mengentheoretiker, der sich von den Paradoxien so wenig irritieren lässt, wie Newton etc. von den eleatischen Witzchen.⁶⁵

In Bezug auf seine Lebenssituation jedoch mußte es HAUSDORFF beunruhigen, wenn das Gebiet, zu dem seine wichtigsten mathematischen Leistungen zählten, innerhalb der mathematischen Gemeinschaft in Frage gestellt wurde. Er stand 1907 im 39. Lebensjahr und war noch immer außerplanmäßiger außerordentlicher Professor. Nicht nur die äußere Stellung in Leipzig war unbefriedigend; er fühlte sich persönlich innerhalb der Leipziger Professorenhierarchie auch wenig integriert, ja sogar mißachtet. Dies zeigt sehr deutlich ein Brief an F. ENGEL vom 21.2.1911, in dem er seine Lage in Bonn mit der in Leipzig vergleicht. Es heißt dort:⁶⁶

Ich wäre sehr gern nach Greifswald gekommen und das Zusammenwirken mit Ihnen hätte mich aufrichtig gefreut; da nun nichts daraus geworden ist, habe ich immerhin das Vergnügen gehabt, erstens zu wissen, dass Sie etwas von mir halten, zweitens nach jahrelangem Stillstand auf dem toten Geleise in Leipzig endlich wieder in Circulation zu sein und überhaupt in Betracht zu kommen. Das war mir doppelt wohlthuend angesichts der schnöden Behandlung, die ich in Leipzig erfahren habe [...]. Erst hier in Bonn ist mir das fatal Bonzenhafte und Unerfreuliche der Leipziger Hierarchie recht zu Bewusstsein gekommen – hier, wo auch der Privatdocent als Mensch gilt, [...]. In Bonn kommt man sich, auch als Nicht-Ordinarius, förmlich existenzberechtigt vor, eine Empfindung, zu der ich mich an der Pleisse nie habe aufschwingen können.⁶⁷

HAUSDORFFS gegenüber HILBERT geäußerte Befürchtungen, die Annalen betreffend, erwiesen sich allerdings als unbegründet. 1908 konnte seine große Abhandlung über geordnete Mengen erscheinen, welche nicht nur die Ergebnisse der früheren Arbeiten zusammenfassend darstellte, sondern darüber hinaus noch eine Reihe neuer Resultate enthielt.⁶⁸

⁶³Ausführlich dargestellt bei [Mo 1982], S. 85–141.

⁶⁴NL HAUSDORFF: Kapsel 26a: Fasz. 81 ; publ. in [H 1907b].

⁶⁵NL LEONARD NELSON. Friedrich-Ebert-Stiftung Bonn, Sign. 1/LNAA 000 272. Auch zitiert bei [P 1991], S. 180.

⁶⁶ENGEL hatte dafür gesorgt, daß HAUSDORFF für ein Ordinariat in Greifswald in der Nachfolge von WILHELM THOMÉ (1841–1910) als einziger primo loco genannt war. Das Kultusministerium in Berlin ignorierte dies und berief THEODOR VAHLEN (1869–1945), damals Extraordinarius in Greifswald. VAHLEN war übrigens schon 1924 ein eifriger Parteigänger Hitlers.

⁶⁷NL ENGEL. Mathematisches Institut der Universität Gießen.

⁶⁸[H 1908]; s. auch Bd. I dieser Edition

Mit Wirkung vom 1.4.1910 wurde HAUSDORFF zum etatmäßigen Extraordinarius an die Universität Bonn berufen. Diese Berufung bedeutete nicht nur eine äußerliche Besserstellung, sondern sie brachte HAUSDORFF auch, wie man aus dem oben zitierten Brief an ENGEL sieht, ein angenehmes akademisches Umfeld. Zu den beiden Bonner Ordinarien EDUARD STUDY (1862–1930) und FRANZ LONDON (1863–1917) entwickelte sich bald ein ausgesprochen freundschaftliches Verhältnis.⁶⁹ In Leipzig, wo sein

an sich nicht sehr entwickeltes Selbstgefühl [...] bereits unter jedes positive ε zu sinken im Begriff war,⁷⁰

hatte er seit 1901 nicht wieder Mengenlehre gelesen, obwohl dies die ganzen Jahre über sein hauptsächliches Arbeitsgebiet gewesen war.

In Bonn begann HAUSDORFF seine Lehrtätigkeit im Sommersemester 1910 mit einer „Einführung in die Mengenlehre“.⁷¹ Im Sommersemester 1912 las er wieder „Einführung in die Mengenlehre“, benutzte jedoch nicht das Skriptum von 1910, sondern arbeitete die Vorlesung neu aus.⁷² Sie ist neben den Grundlagen der Kardinalzahltheorie hauptsächlich der Theorie der Punktmengen im \mathbb{R}^n gewidmet, gründet diese aber bereits auf Umgebungsaxiome und bereitet so den allgemeinen Standpunkt in den *Grundzügen* vor.⁷³ Etwa im August 1912 begann HAUSDORFF die Arbeit an diesem Werk. Das Datum kann man aus einem Brief HAUSDORFFS an HILBERT vom 27.2.1914 erschließen, in dem es heißt:

Ich hoffe Ihnen nächstens ein Buch über Mengenlehre dediciren zu können, an dem ich seit $1\frac{1}{2}$ Jahren gearbeitet habe und von dem augenblicklich die letzten Bogen im Satz sind.⁷⁴

Das Manuskript war Mitte Februar 1913 „grösstenteils vollendet“.⁷⁵

Als F. ENGEL im Frühjahr 1913 einen Ruf an die Universität Gießen erhielt, schlug er HAUSDORFF als Nachfolger im Greifswalder Ordinariat vor. Am 8.3.1913 nahm HAUSDORFF den Ruf nach Greifswald an. In einem Brief an ENGEL vom 11.3.1913 dankt er für dessen Anteil an seiner „Rangerhöhung“. In Bezug auf die Vorlesungen in Greifswald heißt es dann:

[...]; ich möchte gleich bemerken, dass ich mir diesmal und für den Anfang nicht zu viel aufladen kann, schon um endlich mein Buch abschliessen zu können.⁷⁶

Es dauerte jedoch noch über ein Jahr, ehe das Werk erschien. HAUSDORFF hat in Greifswald auch die schon vorhandenen Manuskriptteile erheblich überarbeitet. Leider ist im Nachlaß nur das Manuskript der ersten sechs Kapitel

⁶⁹NL ENGEL, a.a.O., Brief HAUSDORFFS an ENGEL vom 15.2.1913.

⁷⁰Ebd.

⁷¹NL HAUSDORFF: Kapsel 07: Fasz. 27.

⁷²NL HAUSDORFF: Kapsel 09: Fasz. 34.

⁷³S. diesen Band, S. 717–718.

⁷⁴NL HILBERT, a.a.O., Nr. 136.

⁷⁵Brief HAUSDORFFS an F. ENGEL vom 15.2.1913. NL ENGEL, a.a.O. Auch aus diesem Brief kann man schließen, daß HAUSDORFF im August 1912 mit der Niederschrift der *Grundzüge* begonnen hat.

⁷⁶NL ENGEL, a.a.O.

vorhanden. Während das ursprüngliche Manuskript mit schwarzer Tinte geschrieben war, finden sich zahlreiche Korrekturen, Einschübe und Ersetzungen mit blauer Tinte; einige Paragraphen sind vollständig neu verfaßt (Kap.1, §§1 und 11, Kap. 2, §§1–3, Kap. 4, §§3–5).⁷⁷ Blaue Tinte verwandte HAUSDORFF in Greifswald spätestens ab 13.8.1913.⁷⁸ HAUSDORFF scheint auch nach Insatzzgabe der ersten Teile weiter am Manuskript gearbeitet zu haben, denn Satz und Korrekturen haben mehr als 7 Monate in Anspruch genommen.⁷⁹ Die *Grundzüge der Mengenlehre* müssen bereits in der ersten Aprilhälfte des Jahres 1914 erschienen sein, denn schon am 20.4.1914 dankt HAUSDORFF in einem Brief an HILBERT für „Ihre freundlichen Worte über mein Buch...“⁸⁰ In dem bereits erwähnten Brief an ENGEL vom 24.5.1914 äußert er sich zufrieden über sein Werk – nicht ohne einen kräftigen Schuß Ironie und ein wenig Untertreibung:

Lieber und verehrter Herr College, haben Sie vielen Dank für Ihre freundlichen Worte über mein Buch. Ich hoffe, dass es wirklich eine relativ anständige Leistung ist und als solche auch Ihnen, der Sie mich in den erleuchteten Kreis der Ordinarien befördert haben, eine nachträgliche Rechtfertigung erteilt.⁸¹

2. Monographien und Lehrbücher zur Mengenlehre bis 1914

2.1 Cantors *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*

Zwischen CANTORS erster mengentheoretischer Publikation⁸² und dem Erscheinen von HAUSDORFFS *Grundzügen* liegen genau vier Jahrzehnte. Es waren dies Jahrzehnte einer Entwicklung, in deren Ergebnis HAUSDORFF schließlich einen Satz formulierte, der damals mehr kühne Prognose als allgemein akzeptierte Realität war, der jedoch in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts zunehmend als verwirklicht angesehen wurde:

Die Mengenlehre ist das Fundament der gesamten Mathematik; [...]⁸³

Man hat die mengentheoretisch-axiomatisch fundierte Strukturmathematik⁸⁴ des 20. Jahrhunderts – wohl in Anlehnung an B.L. VAN DER WAERDENS 1930/31

⁷⁷NL HAUSDORFF: Kapsel 27: Fasz. 99.

⁷⁸Die letzte datierte Aufzeichnung im Nachlaß mit schwarzer Tinte ist vom 31.5.1913, die erste mit blauer Tinte vom 13.8.1913, beide im Fasz. 1138. Alle auf den 13.8.1913 folgenden datierten Aufzeichnungen sind bis nach dem 1. Weltkrieg mit blauer Tinte geschrieben. In den zwanziger Jahren verwandte HAUSDORFF violette Tinte; schwarze Tinte hat er nicht wieder verwendet.

⁷⁹Im Nachlaß, Kapsel 29, Fasz. 102 befinden sich die Bogenkorrekturen ab S. 97. Der erste vorhandene Bogen (S. 97–112) trägt den Datumsstempel 3.9.1913, der letzte (S. 433–Schluß) wurde von der Setzerei Metzger & Wittig in Leipzig am 31.3.1914 gestempelt. Die Insatzzgabe hat demnach spätestens im August 1913 begonnen, die Bindearbeiten frühestens am 1.4.1914.

⁸⁰NL HILBERT, a. a. O., Nr. 136. HILBERTS Brief ist im Nachlaß HAUSDORFFS nicht mehr vorhanden.

⁸¹NL ENGEL, a.a.O.

⁸²[Ca 1874].

⁸³[H 1914a], S. 1

⁸⁴Zum Begriff der mathematischen Struktur s. [Bou 1948].

erschienene „Moderne Algebra“ – oft „Moderne Mathematik“ genannt. HAUSDORFF war ein Protagonist dieser „Mathematischen Moderne“⁸⁵; seine *Grundzüge* haben zu ihrer Herausbildung einen wesentlichen Beitrag geleistet. Wenn in den letzten Jahrzehnten wieder stärker konkrete, z. T. klassische Fragestellungen in den Mittelpunkt der Aufmerksamkeit der Mathematiker gerückt sind, so geschieht dies doch stets auf der Grundlage der „modernen“ Strukturtheorien; die Lösung des Fermatproblems durch A. WILES ist dafür ein eindrucksvolles Beispiel.

Die Anfänge der Punktmengenlehre entstanden aus Fragestellungen der Analysis, insbesondere der Theorie der Fourierreihen.⁸⁶ In enger Verbindung mit der Ausgestaltung der Punktmengenlehre entwickelte CANTOR auch eine Theorie beliebiger transfiniten Mengen, die allgemeine Mengenlehre, mit ihrem Kernstück, der Theorie der transfiniten Ordinal- und Kardinalzahlen. Diese Theorie wurde erstmals 1883 der mathematischen Öffentlichkeit präsentiert, als Teil V von CANTORS sechsteiliger Arbeit *Über unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten* in den *Mathematischen Annalen*⁸⁷ und als separates Büchlein bei Teubner in Leipzig unter dem Titel *Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre – Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen*. Dieses Werk wich erheblich vom Standard ab, der sonst in den *Mathematischen Annalen* üblich war. Es enthält neben den mathematischen Darlegungen ausführliche historische Betrachtungen und umfangreiche philosophische Auseinandersetzungen über das Aktual-Unendliche, ferner CANTORS Ansichten über die Existenz mathematischer Gegenstände und eine versteckte Polemik gegen LEOPOLD KRONECKER (1823–1891) mit CANTORS berühmtem Bekenntnis zur Freiheit der Mathematik. Die grundlegenden mathematischen Begriffe und Ideen werden nur in referierendem Stil und fast ohne Benutzung von Formeln präsentiert. Bei mehreren Sätzen wird der Leser auf zukünftige Beweise verwiesen.

Die Redaktion der *Mathematischen Annalen* hat eine kühne Tat vollbracht, sich aber auch ein unvergängliches Verdienst erworben, indem sie die Spalten ihrer Zeitschrift diesen Ideen öffnete, [...] ⁸⁸

so schrieb ABRAHAM FRAENKEL (1891–1965) in einem Gedächtnisartikel auf CANTOR im Jahre 1930. Das Hauptanliegen CANTORS in den *Grundlagen* ist die allgemeine Einführung der transfiniten Ordinalzahlen unabhängig von den Ableitungsordnungen von Punktmengen. Dazu dienen die zwei CANTORSchen Erzeugungsprinzipien: Das erste sichert den Übergang von α zu $\alpha + 1$ für jede Ordinalzahl α , das zweite den Übergang von einer transfiniten wohlgeordneten

⁸⁵Vgl. [Me 1990], S.25ff, S.165ff.

⁸⁶Die Darstellung in diesem Abschnitt konzentriert sich auf den Vergleich der *Grundzüge* mit vor 1914 erschienenen einschlägigen Monographien und Lehrbüchern und auf historische Bemerkungen zur allgemeinen Mengenlehre. Zum historischen Kontext der topologischen Kapitel der *Grundzüge*, insbesondere zur Entwicklung der Punktmengenlehre, s. den Artikel *Zum Begriff des topologischen Raumes*, dieser Band, S. 675 ff.

⁸⁷[Ca 1883].

⁸⁸[Fr 1930], S. 200.

Menge von Ordinalzahlen ohne größtes Element zur zugehörigen Limeszahl. Um das zweite Erzeugungsprinzip zu formulieren, wird der grundlegende Begriff der Wohlordnung eingeführt. Das sogenannte Hemmungsprinzip führt zu gewissen natürlichen Einschnitten in der Ordinalzahlreihe, den Zahlklassen. Die Menge der natürlichen Zahlen bezeichnet CANTOR als die erste Zahlklasse, ihre Mächtigkeit nennt er die Mächtigkeit erster Klasse (später von ihm mit \aleph_0 bezeichnet). Das Hemmungsprinzip erzeugt nun den nächsten Einschnitt, indem es verlangt, dass eine Zahl α , welche mittels der beiden Erzeugungsprinzipien erzeugt ist, genau dann zur zweiten Zahlklasse gehört, wenn die Menge der dem α vorangehenden Zahlen die Mächtigkeit der ersten Zahlklasse besitzt. CANTOR beweist, daß die Mächtigkeit der zweiten Zahlklasse (später mit \aleph_1 bezeichnet) die auf \aleph_0 folgende nächstgrößere Mächtigkeit ist. Es ist dies einer der wenigen Beweise in den *Grundlagen*; freilich einer von fundamentaler Bedeutung. Die dritte Zahlklasse und damit die Mächtigkeit \aleph_2 würde sich aus dem Hemmungsprinzip ergeben als die Menge derjenigen α , für die $\{\beta; \beta < \alpha\}$ die Mächtigkeit \aleph_1 hat. Es heißt bei CANTOR:

Ebenso ergibt die dritte Zahlenklasse die Definition der dritten Mächtigkeit oder der Mächtigkeit dritter Classe u. s. w. u. s. w. ⁸⁹

CANTOR kommt bezüglich der Definition der Aleph-Reihe über dies vage „usw.“ nicht hinaus. Sein Resümé lautet folgendermaßen:

Auf diesem Wege, mit Beobachtung dieser drei Principe kann man mit der grössten Sicherheit und Evidenz zu immer neuen Zahlenklassen und mit ihnen zu allen in der körperlichen und geistigen Natur vorkommenden, verschiedenen, successive aufsteigenden Mächtigkeiten gelangen und die hierbei erhaltenen neuen Zahlen sind dann immer durchaus von derselben concreten Bestimmtheit und gegenständlichen Realität wie die früheren; ich wüsste daher fürwahr nicht, was uns von dieser Thätigkeit des Bildens neuer Zahlen zurückhalten sollte, sobald es sich zeigt, dass für den Fortschritt der Wissenschaften die Einführung einer neuen von diesen unzähligen Zahlenklassen in die Betrachtungen wünschenswerth oder sogar unentbehrlich geworden ist. ⁹⁰

An dieser Stelle bemerkte ZERMELO, der Herausgeber von CANTORS Gesammelten Werken, daß die drei CANTORSchen Prinzipien schon für die Bildung der ω -ten Zahlklasse nicht ausreichen. ⁹¹

Zur Rezeption des CANTORSchen Werkes insgesamt schrieb FRAENKEL:

[er ...] hegte den begrifflichen Wunsch nach Anerkennung seines Werkes durch die Kollegen und nach wissenschaftlichem Einfluß auf die angehenden Forscher. Im ganzen blieb ihm dies versagt. ⁹²

⁸⁹[Ca 1883], S. 548.

⁹⁰Ebd., S.581.

⁹¹Dies hatten schon THORALF SKOLEM (1887–1963) [Sk 1922] und A. FRAENKEL [Fr 1922] bemerkt.

⁹²[Fr 1930], S. 208.

FRAENKELS Urteil wurde öfter kolportiert; es ist jedoch so nicht zutreffend.⁹³ Die Rezeption des CANTORSchen Werkes war zweigeteilt: Seine Beiträge zur Theorie der Punktmengen wurden sofort rezipiert. Sie lagen im Strom damals hochaktueller Forschungen über Integrationstheorie und Fourierentwicklung und waren von CANTOR mathematisch wesentlich besser durchgebildet als seine allgemeine Mengenlehre, aus der für die Punktmengentheorie nur die Zahlen der zweiten Zahlklasse und die Unterscheidung von abzählbaren Mengen und Mengen von Kontinuumsmächtigkeit benutzt wurden. Forscher wie PAUL DU BOIS-REYMOND (1831–1889) und AXEL HARNACK (1851–1888) arbeiteten parallel an ähnlichen Fragen. GÖSTA MITTAG-LEFFLER (1846–1927) und HENRI POINCARÉ (1854–1912) zeigten die Fruchtbarkeit der Punktmengentheorie in der Funktionentheorie. ULISSE DINI (1845–1918) verwandte die Ableitung von Punktmengen in der Theorie der reellen Funktionen; sein Lehrbuch [Di 1878] spielte eine wichtige Rolle bei der weiteren Entwicklung dieses Gebiets. Das Dimensionsproblem, das mit CANTORS 1878 geführtem Beweis der Gleichmächtigkeit von $[0, 1]^n$ und $[0, 1]$ aufgeworfen worden war, wurde von CANTOR selbst sowie von JOHANNES THOMAE (1840–1921), JAKOB LÜROTH (1844–1910), ENNO JÜRGENS (1849–1907) und EUGEN NETTO (1846–1919) bearbeitet, wenn auch nicht mit endgültigem Erfolg⁹⁴. GIUSEPPE PEANO (1858–1939) und D. HILBERT leisteten durch die Konstruktion stetiger Streckenbilder, die eine Fläche erfüllen, wesentliche Beiträge zu diesem Fragenkreis. CANTORS Ansätze zum Inhaltsproblem wurden von PEANO und CAMILLE JORDAN (1838–1922) zu einer Theorie des additiven Inhalts ausgebaut. Es zeigte sich im Verlaufe der achtziger und neunziger Jahre des 19. Jahrhunderts immer deutlicher, daß die Punktmengenlehre für die Weiterentwicklung der Maß- und Integrationstheorie und der Theorie der reellen Funktionen die geeignete Grundlage darstellte.

Ganz anders verlief die Rezeption von CANTORS allgemeiner Mengenlehre. Sie wurde fast vollständig ignoriert und von einer Reihe von Mathematikern sogar strikt abgelehnt. KRONECKERS Opposition ist wohlbekannt. Ähnlich scharf ablehnend reagierte CHARLES HERMITE (1822–1901) in einem Brief an MITTAG-LEFFLER vom April 1883.⁹⁵ Selbst ein Forscher wie RICHARD DEDEKIND (1831–1916), der 1888 in seiner Schrift *Was sind und was sollen die Zahlen?* Begriffe und Ideen einführt, die später zum Kernbestand der allgemeinen Mengenlehre gehörten⁹⁶, konnte sich mit CANTORS Theorie der transfiniten Ordnungszahlen und sukzessive aufsteigenden Mächtigkeiten nicht anfreunden – jedenfalls hat er nie darauf Bezug genommen. CANTOR hatte in den *Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre* auch kein einziges Motiv aus der damals bekannten Mathematik dafür anführen können, warum man beliebige Mengen mit beliebig großen Mächtigkeiten betrachten solle. Zudem waren

⁹³S. dazu [PuI 1987], S. 72–73, und [F 1999], S. 282–284.

⁹⁴Die frühen Bemühungen, die Invarianz der Dimension bei Homöomorphismen zu beweisen, sind bei [Jo 1979], S. 146–162, eingehend behandelt.

⁹⁵Abgedruckt bei [Mo 1989], S. 96.

⁹⁶S. dazu die einführenden Bemerkungen von G. ASSER zur 11. Auflage von *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Berlin 1967.

seine diesbezüglichen Ausführungen – wie bereits erwähnt – noch sehr vage. Vielleicht wäre die Rezeption der allgemeinen Mengenlehre günstiger verlaufen und viel schneller erfolgt, wenn CANTOR selbst dazu weiter publiziert und seine Ideen ausführlicher dargestellt hätte. Er zog sich jedoch nach 1885 für einige Jahre aus den mathematischen Journalen vollständig zurück.⁹⁷ Erst 1892 erschien wieder eine mathematische Arbeit CANTORS, und zwar im Band I des Jahresberichts der Deutschen Mathematikervereinigung⁹⁸, deren erster Vorsitzender CANTOR war. Er bewies dort den für die Mengenlehre grundlegenden und in vieler Beziehung folgenreichen Satz, daß die Menge aller Teilmengen einer gegebenen Menge M eine größere Mächtigkeit als M hat.⁹⁹

CANTOR mag schließlich selbst die Notwendigkeit empfunden haben, die Verbreitung und Anerkennung seiner allgemeinen Mengenlehre durch eine sorgfältig ausgearbeitete Darstellung zu befördern. Jedenfalls erschienen 1895 und 1897 in den Mathematischen Annalen in zwei Teilen von insgesamt reichlich 70 Seiten Umfang seine *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*.¹⁰⁰ CANTOR verzichtete hier vollkommen auf historische oder philosophische Argumentationen und legte größten Wert auf möglichst klare Definitionen der grundlegenden Begriffe und auf ausgeführte Beweise. Die Anmerkungen zu dieser Arbeit in CANTORS Gesammelten Abhandlungen beginnt ZERMELO mit folgenden Worten:

Die vorstehende, in zwei Abteilungen im Abstände von zwei Jahren erschienene Abhandlung, die letzte Veröffentlichung CANTORS über die Mengenlehre, bildet den eigentlichen Abschluß seines Lebenswerkes. Hier erhalten die Grundbegriffe und Ideen, nachdem sie sich im Laufe von Jahrzehnten allmählich entwickelt haben, ihre endgültige Fassung, und viele Hauptsätze der „allgemeinen“ Mengenlehre finden erst hier ihre klassische Begründung.¹⁰¹

An die Spitze der *Beiträge* stellt CANTOR seine berühmte Mengendefinition¹⁰² und die Definition des Begriffs „Kardinalzahl“ (synonym verwendet CANTOR die Bezeichnung „Mächtigkeit“).¹⁰³ Nach Einführung der Kleinerbeziehung für Kardinalzahlen stellt CANTOR fest, daß für zwei Kardinalzahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ nur eine der drei Beziehungen $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$ eintreten kann. Daß auch tatsächlich eine dieser drei Beziehungen stets eintritt, d. h. daß zwei Kardinalzahlen der Größe nach stets vergleichbar sind, verspricht CANTOR mittels der Alephfolge später zu beweisen; er konnte dieses Versprechen allerdings nicht einlösen, weil er nicht beweisen konnte, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann und damit

⁹⁷S. [F 1999], S.284.

⁹⁸[Ca 1892].

⁹⁹Nach B. RUSSELLS eigenem Zeugnis ([Rus 1959], S. 75) hat ihn das Nachdenken über diesen Satz auf die nach ihm benannte Antinomie geführt.

¹⁰⁰[Ca 1895/1897].

¹⁰¹[Ca 1932], S. 351.

¹⁰²Zur Problematik dieses sogenannten naiven Mengenbegriffes bei CANTOR s. [PuI 1987], S. 158 ff., siehe auch diesen Band, S. 577.

¹⁰³Zum Begriff der Kardinalzahl s. diesen Band, S. 634 ff.

jede Kardinalzahl ein Aleph ist. Den später nach ERNST SCHRÖDER (1841–1902) und BERNSTEIN benannten Äquivalenzsatz¹⁰⁴ behandelt CANTOR als Folgerung aus dem Vergleichbarkeitssatz; da dieser offen blieb, war auch die Frage, ob aus $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$, $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}$ stets $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ folgt, ein offenes Problem.

Es folgen dann in den *Beiträgen* die Definitionen von Summe, Produkt und Potenz zweier Kardinalzahlen. Hier erscheinen zu zwei Mengen M, N als neue Mengenbildungen erstmals die Produktmenge $M \times N$ und die „Belegungsmenge“ M^N (die Menge aller Funktionen auf N mit „Werten“ in M). Nach Betrachtungen über \aleph_0 als kleinste transfiniten Kardinalzahl stellt CANTOR mit folgenden Bemerkungen die Konstruktion der Aleph-Folge in Aussicht, welche, da CANTOR von der Gültigkeit des Wohlordnungssatzes überzeugt war, nach seiner Meinung jede Kardinalzahl enthalten muß:

Aus \aleph_0 geht nach einem bestimmten Gesetze die *nächstgrößere* Cardinalzahl \aleph_1 , aus dieser nach demselben Gesetze die *nächstgrößere* \aleph_2 hervor und so geht es weiter.

Aber auch die unbegrenzte Folge der Cardinalzahlen

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \dots, \aleph_\nu, \dots$$

erschöpft nicht den Begriff der transfiniten Cardinalzahl. Es wird die Existenz einer Cardinalzahl nachgewiesen werden, die wir mit \aleph_ω bezeichnen und welche sich als die zu *allen* \aleph_ν *nächstgrößere* ausweist; aus ihr geht in derselben Weise wie \aleph_1 aus \aleph_0 eine nächstgrößere $\aleph_{\omega+1}$ hervor, und so geht es ohne Ende fort.

Zu *jeder* transfiniten Cardinalzahl \mathfrak{a} giebt es eine nach einheitlichem Gesetz aus ihr hervorgehende *nächstgrößere*; aber auch zu jeder unbegrenzt aufsteigenden wohlgeordneten Menge $\{\mathfrak{a}\}$ von transfiniten Cardinalzahlen \mathfrak{a} giebt es eine *nächstgrößere*, einheitlich daraus hervorgehende.¹⁰⁵

CANTOR hat die hier ausgesprochenen Behauptungen jedoch nicht bewiesen, da er in der Theorie der Ordinalzahlen über die zweite Zahlklasse nicht hinausging. Eine befriedigende Einführung der sukzessiven Alephs war somit ebenfalls ein offenes Problem.

Auf die Kardinalzahltheorie folgt in den *Beiträgen* die Theorie der geordneten Mengen und ihrer Ordnungstypen.¹⁰⁶ Die Ordinalzahlen werden dann als Ordnungstypen wohlgeordneter Mengen eingeführt; die Erzeugungsprinzipien spielen keine Rolle mehr. Auch das Hemmungsprinzip wird nicht mehr benötigt: die zweite Zahlklasse ist die Menge der Ordnungszahlen abzählbarer wohlgeordneter Mengen. CANTOR zeigt wie schon in den *Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre*, daß deren Mächtigkeit \aleph_1 die auf \aleph_0 nächstfolgende Mächtigkeit ist. Im Anschluss daran behandelt er die Ordinalzahlarithmetik

¹⁰⁴Der Äquivalenzsatz sollte besser nach DEDEKIND und BERNSTEIN benannt werden; s. dazu Anm. [19] zum Text der *Grundzüge*, dieser Band, S. 587.

¹⁰⁵[Ca 1895/1897], S. 495–496.

¹⁰⁶S. dazu ausführlicher diesen Band, S. 686.

für die Zahlen der zweiten Zahlklasse und schließt die *Beiträge* mit einem Paragraphen über die sogenannten ε -Zahlen der zweiten Zahlklasse (die kritischen Zahlen der Normalfunktion $f(\alpha) = \omega^\alpha$).¹⁰⁷ CANTOR hatte noch einen dritten Teil der *Beiträge* geplant, in dem er den Wohlordnungssatz beweisen wollte¹⁰⁸; dieser dritte Teil ist jedoch nicht erschienen.

CANTORS *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* können – obwohl als Zeitschriftenartikel erschienen – mit Fug und Recht als ein erstes Lehrbuch der allgemeinen Mengenlehre betrachtet werden. Sie erschlossen dieses neue Gebiet in systematischer Darstellung ohne Rückgriff auf die reellen Zahlen und unabhängig von der Theorie der Punktmengen. Die grundsätzlichen Probleme, die offen geblieben waren, übten einen besonderen Reiz auf junge Mathematiker aus. Das Erscheinen in den *Mathematischen Annalen* sicherte eine weite Verbreitung. Hinzu kam, daß der erste Teil sofort ins Französische und Italienische übersetzt wurde; eine komplette französische Übersetzung erschien 1899.

2.2 Erste französische Monographien

Im Jahre 1898 kam in Paris ein sehr einflußreiches Buch heraus, EMILE BORELS (1871–1956) *Leçons sur la théorie des fonctions*. Es war die überarbeitete Niederschrift einer Vorlesung an der École Normale vom Frühjahr 1897. Nachdem BOREL in der Einleitung auf die große Tradition der Theorie der reellen und komplexen Funktionen in Frankreich verwiesen hat (Lehrbücher und Monographien von HERMITE, JORDAN, PICARD, MÉRAY, DEMARTRES, TANNERY/MOLK), heißt es:

Mais la lecture des Mémoires originaux devient chaque jour plus difficile pour celui qui connaît seulement de la Théorie des fonctions les parties regardées actuellement comme classiques; il m'a dès lors semblé qu'on pouvait chercher à faire œuvre utile en tentant d'exposer, d'une manière élémentaire, certaines recherches qui, bien que relativement récentes, prennent chaque jour une importance plus considérable. De ce nombre est la théorie des ensembles: c'est à elle qu'est consacré cet Ouvrage.¹⁰⁹

In der Tat kann das Buch bis zum gewissen Grade als ein Lehrbuch der Mengenlehre angesehen werden. Im Kapitel I wird der Begriff der Mächtigkeit erklärt; die abzählbaren Mengen und die Mengen von Kontinuumsmächtigkeit werden anhand von Beispielen eingehender behandelt. Auf andere Mächtigkeiten geht BOREL nicht ein; er schreibt mit Blick auf die Begriffe „abzählbar“ und „von Kontinuumsmächtigkeit“:

Ces notions nous suffiront pour les applications que nous avons en vue.¹¹⁰

¹⁰⁷S. diesen Band, S. 214.

¹⁰⁸S. dazu [F 1999], S. 294–296.

¹⁰⁹[Bo 1898], S. VII–VIII.

¹¹⁰Ebd., S. 20.

Kapitel II behandelt aus der Mengenlehre die Abzählbarkeit der Menge der algebraischen Zahlen, ferner Ergebnisse von HERMITE und JOSEPH LIOUVILLE (1809–1882) über Transzendenz und diophantische Approximationen. Kapitel III ist den Punktmengen gewidmet. Behandelt werden perfekte Mengen, insbesondere die Konstruktion perfekter nirgends dichter Mengen. Ferner wird unter der Überschrift „Les ensembles mesurables“ die für die Entwicklung der Maß- und Integrationstheorie äusserst folgenreiche neue Idee präsentiert, anstelle der Additivität des Inhalts die σ -Additivität zu fordern. Die restlichen drei Kapitel behandeln Anwendungen der bereitgestellten Grundlagen auf die Funktionentheorie (analytische Fortsetzung, Theoreme von MITTAG-LEFFLER) und die Theorie der reellen Funktionen (Konvergenzmengen von Funktionenreihen). In Anhängen (Notes) geht BOREL auf weitere mengentheoretische Themen ein. In Note I wird erstmals ein Beweis für den bei CANTOR noch offen gebliebenen Äquivalenzsatz publiziert. In einer Fußnote merkt BOREL an, daß F. BERNSTEIN diesen Beweis gefunden und 1897 in CANTORS Seminar vorgetragen habe. CANTOR habe ihm den Beweis auf dem Internationalen Mathematikerkongreß in Zürich mitgeteilt und ihm erlaubt, ihn in die *Leçons* aufzunehmen. Ferner bringt BOREL in Note I CANTORS Satz, daß die Potenzmenge einer Menge M eine höhere Mächtigkeit als M hat. Note II bringt zunächst DU BOIS-REYMONDS Theorie der „Unendlich“¹¹¹ und dann einen nur knapp dreiseitigen Abriss der Theorie der transfiniten Ordnungszahlen unter dem Titel „Nombres de M. G. Cantor“.

BOREL fungierte als Begründer und Herausgeber einer berühmten Serie von Monographien „Collection de monographies sur la théorie des fonctions“, welche es bis 1930 auf 34 Titel brachte. Seine *Leçons* wurden als der erste Band der „Collection“ gezählt. 1905 erschien in dieser Serie ein weiterer Titel von BOREL: *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes* ([Bo 1905]), welcher auch ein kurzes Kapitel „Notions générales sur les ensembles“ enthielt. Hier waren auch einige seit 1898 erzielte neuere Ergebnisse, z. B. über Mengen erster Kategorie, eingearbeitet. Den entscheidenden Beitrag zur Verbreitung der Mengenlehre in Frankreich hatten aber die *Leçons* von 1898 geleistet. In der Rezension von [Bo 1905] im *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* heißt es:

In dem ersten Kapitel kommt Borel auf die Mengenlehre zurück, deren Einführung in Frankreich durch seine „Leçons sur la théorie des fonctions“ vom Jahre 1898 so sehr gefördert worden ist; [...]¹¹²

Die CANTORSche Theorie der Ordnungszahlen, die BOREL nur sehr kurz gestreift hatte, war für RENÉ BAIRE (1874–1932) und seine Klassifikation der Funktionen von größter Bedeutung. In BAIRES *Leçons sur les fonctions discontinues* ([B 1905]), welche auch in der BORELSchen „Collection“ erschienen, wurde dieser Teil der Mengenlehre im Kapitel II „Les ensembles bien ordonnés

¹¹¹S. diesen Band, S. 685.

¹¹²*Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, Band 36 (1905), S. 436. Autor dieser Besprechung war E. STAECKEL.

et les nombres transfinitis“ eingehend behandelt, gefolgt von einem Kapitel über lineare Punktmengen. Auch diese Monographie wurde später als wichtige Quelle zur Mengenlehre zitiert.

In BORELS *Leçons* von 1898 deutet sich schon eine Tendenz an, die in der Folgezeit für die französische Schule der Theorie der reellen Funktionen und der Maßtheorie um BOREL, BAIRE und HENRI LEBESGUE (1875–1941) charakteristisch war: Breite Nutzung und schöpferische Weiterentwicklung der Punktmengentheorie (was die Verwendung der Zahlen der zweiten Zahlklasse und die Unterscheidung in abzählbare Mengen und Mengen von Kontinuumsmächtigkeit einschloß) bei gleichzeitiger Ablehnung von CANTORS allgemeiner Theorie beliebiger Mengen von beliebiger Mächtigkeit.¹¹³

2.3 Die Göttinger Schule. Schoenflies' erster Bericht

In Deutschland hatte ab Mitte der neunziger Jahre Göttingen (mit FELIX KLEIN (1849–1925), D. HILBERT und (ab 1902) HERMANN MINKOWSKI (1864–1909)) Berlin als führendes mathematisches Zentrum abgelöst. Für die Rezeption der CANTORSchen Ideen zur allgemeinen Mengenlehre und für deren Weiterentwicklung war ausschlaggebend, daß die Göttinger Mathematiker CANTOR hoch schätzten, die große Bedeutung seiner Schöpfungen früh erkannten und junge Mathematiker ermutigten, auf dem Gebiet der Mengenlehre zu arbeiten. FRAENKEL hat 1930 – wie bereits erwähnt – von einer „kühnen Tat“ der Redaktion der Mathematischen Annalen gesprochen, den Teil V von CANTORS *Über unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten* abzudrucken. In Wahrheit war es F. KLEIN allein, der diese kühne Tat vollbrachte.¹¹⁴ Auch in KLEINS Lieblingsprojekt, der *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen* fand im Band I ein Artikel über Mengenlehre von A. SCHOENFLIES Platz.¹¹⁵

H. MINKOWSKI hat zwar nie über Mengenlehre gearbeitet, er gehörte jedoch früh zu CANTORS Verehrern. 1895 schrieb er in einem Brief an HILBERT:

Das Aktual-Unendliche ist ein Wort, das ich aus einem Aufsatz von Cantor habe, und ich habe in meinem Vortrage auch grösstentheils Sätze von Cantor gebracht, die allgemeines Interesse fanden; nur wollten einige nicht recht daran glauben. [...] Bei dieser Gelegenheit habe ich von Neuem wahrgenommen, daß Cantor doch einer der geistvollsten lebenden Mathematiker ist.¹¹⁶

In seinem Nachruf auf MINKOWSKI hebt HILBERT dieses Urteil besonders hervor und fährt dann fort:

¹¹³Zu den französischen „Halbintuitionisten“ BAIRE, BOREL und LEBESGUE s. [Mo 1982], S. 92–103.

¹¹⁴Dies geht aus den Briefen CANTORS an KLEIN hervor ([PuI 1987], Dokumentenanhang Nr. 3, 9, 10–12).

¹¹⁵[Sch 1898]. Dieser ist allerdings nur 24 Seiten lang und enthält leider neben historischen Fehlern (z. B. wird behauptet, CANTOR habe schon 1873 die Äquivalenz von Kontinua verschiedener Dimension bewiesen) auch fachliche Unzulänglichkeiten (im Absatz 5 „Die Ordnungstypen“).

¹¹⁶[Min 1973], S. 68.

Der Umstand, daß ein Mann wie Minkowski, der das exakte Schließen in der Mathematik gewissermaßen verkörperte und dessen Sinn für echte Zahlentheorie über allem Zweifel war, so urteilte, ist der Verbreitung der Cantorsche Theorie [...] sehr zustatten gekommen.¹¹⁷

Möglicherweise spielt HILBERT hier auf A. HURWITZ' Vortrag auf dem 1. Internationalen Mathematikerkongreß in Zürich an, der – wie bereits erwähnt – für CANTORS Ideen eine erste öffentliche Anerkennung vor großem internationalem Publikum bedeutete.¹¹⁸ MINKOWSKI und HURWITZ waren damals Kollegen an der ETH Zürich und es ist gut möglich, daß MINKOWSKIS Begeisterung für CANTORS Ideen nicht ohne Einfluß auf HURWITZ war.

HILBERT selbst hat in seinem Vortrag *Mathematische Probleme* auf dem 2. Internationalen Mathematikerkongreß in Paris im August 1900 die offenen Fragen der Mengenlehre an die Spitze seiner Problemliste gerückt. Unter Problem Nr.1 nennt er CANTORS Kontinuumhypothese als einen Satz, dessen Beweis trotz eifrigster Bemühungen bisher nicht gelungen sei; ferner wünscht er einen Beweis für die Möglichkeit, das Kontinuum der reellen Zahlen wohlzuordnen. Unter Nr.2 verlangt HILBERT zunächst einen Beweis für die Widerspruchsfreiheit der arithmetischen Axiome. Aber er geht hier noch wesentlich weiter. Nachdem er seine wohlbekanntere Auffassung von der Existenz mathematischer Gegenstände erläutert hat, heißt es:

Der Begriff des Continuum oder auch der Begriff des Systems aller Functionen existirt dann in genau demselben Sinne wie etwa das System der ganzen rationalen Zahlen oder auch wie die höheren CANTORSchen Zahlklassen und Mächtigkeiten. Denn ich bin überzeugt, daß auch die Existenz der letzteren in dem von mir bezeichneten Sinne ebenso wie die des Continuum wird erwiesen werden können – im Gegensatz zu dem System aller Mächtigkeiten überhaupt oder auch aller CANTORSchen Alephs, für welches, wie sich zeigen läßt, ein widerspruchloses System von Axiomen in meinem Sinne nicht aufgestellt werden kann und welches daher nach meiner Bezeichnungweise ein mathematisch nicht existirender Begriff ist.¹¹⁹

Diese Passage ist in zweifacher Hinsicht besonders bemerkenswert. Zum einen wurde hier die Überzeugung ausgesprochen, daß ein widerspruchsfreies Axiomensystem der Mengenlehre möglich sein müßte und damit implizit die Aufforderung, ein solches Axiomensystem aufzustellen. Zum anderen wurde hier vor einer großen Öffentlichkeit klar zum Ausdruck gebracht, daß Begriffe wie „Menge aller Mächtigkeiten“ oder „Menge aller Alephs“ (und damit auch „Menge aller Ordinalzahlen“) widersprüchlich sind und folglich als mathematische Begriffe im HILBERTschen Sinne nicht existieren. Ein Axiomensystem der Mengenlehre mußte also den Weg zu diesen antinomischen „Mengenbildungen“ abschneiden.¹²⁰

¹¹⁷[Hi 1909/1910], S. 467.

¹¹⁸Zu HURWITZ' Vortrag s. diesen Band, S. 682.

¹¹⁹[Hi 1900], S. 266.

¹²⁰CANTOR selbst bemerkte bei der Ausarbeitung seiner allgemeinen Theorie, spätestens

An einen Göttinger Mathematiker, nämlich an A. SCHOENFLIES, hatte die Deutsche Mathematikervereinigung auch den Auftrag erteilt, einen Bericht über „Curven- und Punktmannigfaltigkeiten“ zu erstatten.¹²¹ Teil I des Berichts erschien 1900 im Jahresbericht der DMV.¹²² Der SCHOENFLIESSche Bericht war die bis zu diesem Zeitpunkt umfassendste Darstellung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen. Er gliedert sich in drei Abschnitte: I. Allgemeine Theorie der unendlichen Mengen, II. Theorie der Punktmengen, III. Anwendung auf Funktionen reeller Variablen. Im Vorwort spricht SCHOENFLIES selbst davon, daß der Bericht in den ersten beiden Abschnitten „mehr die Form eines Lehrbuchs angenommen“ habe. Das ist in der Tat der Fall; allerdings geht SCHOENFLIES kaum über das hinaus, was man auch schon bei CANTOR finden konnte. Die grundlegenden Begriffsbildungen (Menge, Kardinalzahl, Ordnungstypus, Ordnungszahl) werden unverändert von CANTOR übernommen. Neu ist im ersten Abschnitt über allgemeine Mengenlehre im Vergleich zu [Ca 1895/97] die Unendlichkeitsdefinition von DEDEKIND und der Beweis des DEDEKIND-BERNSTEINSchen Äquivalenzsatzes. Bezüglich der höheren Zahlklassen bleibt SCHOENFLIES vage. Nachdem er die Bildung der ersten drei Zahlklassen erläutert hat, schreibt er:

So kann man fortfahren; es erwächst so der Ausblick auf eine wohlgeordnete Menge der Größe nach geordneter Mächtigkeiten

$$(A) \quad \aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \dots, \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \dots,$$

und zwar ist jede als einer Zahlklasse zugehörig zu betrachten, die die Gesamtheit aller Ordnungstypen darstellt, die einer Menge der vorhergehenden Mächtigkeit entsprechen. CANTOR hat dafür auch den Ausdruck benutzt, daß die Ordnungstypen jeder Zahlklasse abzählbar werden durch die Ordnungszahlen der nächstfolgenden Klasse. Doch ist man hier über diese allgemeinen Definitionen und Formulierungen nicht hinausgekommen. Nur ist zu bemerken, daß die obige Reihe aller \aleph der schon früher erwähnten Reihe W ähnlich ist, die die Menge aller der Größe nach geordneten Ordnungszahlen darstellt.¹²³

Aus diesem Zitat ist auch ersichtlich, daß SCHOENFLIES – ganz im Gegensatz zu HILBERT – das Problem der Antinomien nicht erkannt hatte: Er spricht von der *wohlgeordneten Menge* der Alephs und von der *Menge W* aller Ordnungs-

1883, daß die „Menge“ aller Kardinalzahlen oder die aller Ordinalzahlen keine *transfiniten Mengen* in seinem Sinne sind; s. dazu [Pu 1986]. In Briefen vom 26.9. und 2.10.1897 hatte CANTOR HILBERT die Antinomie aller Alephs erläutert und versucht, ihm seine Unterscheidung zwischen transfiniten Mengen, die Gegenstand der Mathematik sind, und dem „absoluten Unendlich“, welches eine mathematische Erfassung nicht erlaubt, nahezubringen. Ob CANTOR zu diesem Zeitpunkt die Arbeit von BURALI-FORTI [Bu 1897] schon kannte, ist umstritten.

¹²¹SCHOENFLIES spricht im September 1900 davon, daß dieser Auftrag „vor einigen Jahren“ an ihn ergangen sei. Er war ab 1899 Ordinarius in Königsberg.

¹²²[Sch 1900].

¹²³[Sch 1900], S. 49.

zahlen.¹²⁴ Im zweiten Abschnitt bringt SCHOENFLIES zunächst die Punktmengentheorie des \mathbb{R}^n , so wie sie CANTOR bereits entwickelt hatte.¹²⁵ An Neuem kommen die Konstruktion nirgendsdichter perfekter Mengen im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 , die Inhaltstheorie von PEANO und JORDAN sowie die von BAIRE eingeführten Begriffe der Mengen erster und zweiter Kategorie hinzu. Die Erweiterung des Inhaltsbegriffs auf σ -additive Maße durch BOREL wird kurz erwähnt, ohne daß deren grundsätzliche Bedeutung erkannt wird.

Im dritten Abschnitt, der vom Umfang her mehr als die Hälfte des Berichts ausmacht, konzentriert sich SCHOENFLIES auf diejenigen Ergebnisse der Theorie der reellen Funktionen, für welche die Punktmengentheorie von ausschlaggebender Bedeutung war. Es ist ihm hier gelungen, die Resultate einschlägiger Forschungen zahlreicher Mathematiker – erwähnt seien G. ASCOLI, C. ARZELA, R. BAIRE, P. DU BOIS-REYMOND, E. BOREL, T. BRODÉN, G. DARBOUX, U. DINI, H. HANKEL, A. HARNACK, D. HILBERT, O. HÖLDER, C. JORDAN, A. KOEPCKE, H. LEBESGUE, G. PEANO, A. PRINGSHEIM, B. RIEMANN, L. SCHEEFFER, H.A. SCHWARZ, ST. SMITH, J. THOMAE, CH. DA LA VALLÉE-POUSSIN, V. VOLTERRA, K. WEIERSTRASS – in der Form eines Ergebnisberichts zusammenfassend darzustellen. Sein Bericht wurde im *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* ausführlich besprochen und hat ohne Zweifel viel zur Verbreitung und Popularisierung der Mengenlehre beigetragen. Leider enthielt er eine Reihe von Fehlern, die SCHOENFLIES im zweiten Teil¹²⁶ berichtigt hat; einige dieser Fehler führten zu einem sehr unerquicklichen öffentlichen Streit zwischen SCHOENFLIES und WILLIAM HENRY YOUNG (1863–1942). HAUSDORFF hat den SCHOENFLIESSchen Bericht nicht besonders geschätzt, wie man aus einem Brief an HILBERT¹²⁷ sieht.

2.4 Hausdorff über Russells *The Principles of Mathematics*

Mit BERTRAND RUSSELLS (1872–1970) 1903 erschienenem Buch *The Principles of Mathematics* und mit GOTTLIB FREGES (1848–1925) schockierter Reaktion auf die ihm vorab mitgeteilte RUSSELLSche Antinomie¹²⁸ rückten die Antinomien der Mengenlehre nachdrücklich in das öffentliche Bewußtsein. Da RUSSELLS Antinomie – *the contradiction*, wie er sagte – auf rein logischen Begriffen beruhte, sah er die Notwendigkeit einer grundlegenden Reform der Lo-

¹²⁴Es ist eine weitverbreitete Meinung, daß C. BURALI-FORTI 1897 erstmals eine mengentheoretische Antinomie, nämlich die Antinomie der „Menge aller Ordnungszahlen“ publiziert habe. Das trifft jedoch so nicht zu; s. [MoGa 1981]. BURALI-FORTI zeigte in [Bu 1897], daß die Trichotomie für eine gewisse Klasse von Ordnungstypen, welche er fälschlicherweise für Ordnungszahlen hielt, nicht zutrifft. Seine Beweiskette wurde erst nachträglich von RUSSELL in *The Principles of Mathematics* ([Rus 1903]) zu einer Antinomie uminterpretiert und dann als solche bekannt und BURALI-FORTI zugeschrieben. BURALI-FORTIS Arbeit selbst ist 5 Jahre lang überhaupt nicht beachtet worden; auch SCHOENFLIES erwähnt sie nicht.

¹²⁵S. diesen Band, S. 678–681.

¹²⁶[Sch 1908a].

¹²⁷S. S. 49 dieser Einführung.

¹²⁸In [Frege 1903]. ZERMELO hatte die RUSSELLSche Antinomie bereits vor RUSSELL entdeckt, ohne sie aber einer gesonderten Publikation für wert zu halten; s. dazu [RTho 1981]. Man sollte deshalb besser von ZERMELO-RUSSELLScher Antinomie sprechen.

gik, um dann in einem geplanten und 1903 bereits angekündigten Band II der *Principles* die gesamte Mathematik darauf zu gründen. Einen Band II der *Principles* hat RUSSELL jedoch nicht geschrieben, und dieses Vorhaben wurde erst 1910–1913 mit den dreibändigen *Principia Mathematica* von ALFRED NORTH WHITEHEAD (1861–1947) und RUSSELL in Angriff genommen.¹²⁹ Es ist hier nicht der Ort, die große historische Bedeutung der *Principia Mathematica* zu würdigen¹³⁰, zumal sie HAUSDORFFS *Grundzüge* nicht beeinflussten und beide Werke ein völlig verschiedenes Anliegen verfolgten und eine ganz verschiedene Rezeptionsgeschichte hatten. Es geht uns im folgenden nur um HAUSDORFFS Reaktion auf RUSSELLS *Principles of Mathematics*. Diese waren der Versuch einer Philosophie der Mathematik vom logizistischen Standpunkt aus; RUSSELLS Ziel war

the proof that all pure mathematics deals exclusively with concepts definable in terms of a very small number of fundamental logical concepts, and that all its propositions are deducible from a very small number of fundamental logical principles, [...]¹³¹

Den weit gespannten Bogen ersieht man bereits aus einer Aufzählung der Überschriften der einzelnen Teile: I. The Indefinables of Mathematics, II. Number, III. Quantity, IV. Order, V. Infinity and Continuity, VI. Space, VII. Matter and Motion. In diesem Rahmen ist auch die Mengenlehre ausführlich behandelt, wobei es nicht RUSSELLS Anliegen war, eine lehrbuchmäßige Darstellung zu geben.

HAUSDORFF hat sich mit den *Principles of Mathematics* sehr eingehend auseinandergesetzt und in der *Vierteljahresschrift für wissenschaftliche Philosophie und Sociologie* eine Besprechung veröffentlicht.¹³² Im Nachlaß finden sich mehr als 50 Seiten Anmerkungen, teils sehr kritischer Natur, zu den einzelnen Paragraphen in RUSSELLS Buch.¹³³ Hausdorffs Kritik geht hauptsächlich in zwei Richtungen: 1) So anerkanntenswert der formale Standpunkt bei RUSSELL sei, die Mathematik aus Axiomen zu deduzieren und gewisse Grundbegriffe dabei als „undefinable“ zu kennzeichnen, so zerstöre er dies wieder, indem er

uns zwingen will, die Charaktere des Fundamentalen und des Abgeleiteten in bestimmter Weise zu verteilen, und uns in rein definitiven Angelegenheiten vor tiefsinnige und haarspalterische Entscheidungen stellt.¹³⁴

2) habe RUSSELL ein kontradiktorisches Element in Logik und Mathematik hineingezogen, indem er etwa die Kardinalzahl einer Menge definiert als die Klasse aller mit ihr äquivalenten Mengen. HAUSDORFF bemerkt dazu durchaus zutreffend:

¹²⁹[WhRus 1910–1913].

¹³⁰S. etwa [Q 1941], [G 1944], [Put 1967], [Ro 1991] und [F 1999].

¹³¹[Rus 1903], S. V.

¹³²[H 1905]. Ein vollständiger Abdruck mit Kommentar findet sich in Band I dieser Edition.

¹³³NL HAUSDORFF: Kapsel 49: Fasz.1068.

¹³⁴[H 1905], S.121.

Hier haben wir wieder den unvollziehbaren Begriff „aller“ Mengen, und an der Spitze der Arithmetik stünde als Urwiderspruch die Zahl Eins in ihrer kontradiktorischen Gestalt als Klasse *aller* Einzeldinge. Von der Definition des Ordnungstypus als Klasse *aller* mit einer gegebenen Menge ähnlicher Mengen ist natürlich das Gleiche zu sagen. Gerade die Existenz jenes Widerspruchs legt der Logik und Mathematik die Pflicht auf, die (endlichen und unendlichen) Mengen, innerhalb deren sie operiert, auf widerspruchsfreie Definition zu prüfen; solche Klassen wie die Menge aller natürlichen Zahlen, die Menge aller Punkte des Raumes, die Menge aller Funktionen scheinen keine Bedenken darzubieten, während die Menge aller unendlichen Kardinal- oder Ordinalzahlen, oder in der Logik jene uferlosen Negationen, wie Nichtmensch, nichtgrün, zu den unzulässigen Klassenbegriffen gehören.¹³⁵

Die Aufgabe, die Grundlagenschwierigkeiten zu überwinden, hat HAUSDORFF hier klar bezeichnet – er nimmt die Antinomien durchaus ernst. Allerdings hat er die Rolle der Logik dabei und die tatsächlichen Schwierigkeiten wohl zeit lebens unterschätzt.

So verdient voll gerade in Bezug auf die Rolle der Logik RUSSELLs Ansatz war und so wichtig sich die *Principles* für die Auseinandersetzung um die Antinomien erwiesen haben: RUSSELL selbst hatte 1903 über die Antinomie der „Menge aller Ordnungszahlen“ keineswegs so klare Vorstellungen wie etwa CANTOR, HILBERT, HAUSDORFF oder ZERMELO. Nachdem RUSSELL BURALI-FORTIS Argumente analysiert hat, heißt es in den *Principles*:

But there is another premiss in M. Burali-Forti's argument, which appears to me more capable of denial, and that is, that the series of all ordinal numbers is well-ordered. This does not follow from the fact that all its segments are well-ordered, and must, I think, be rejected, since, so far as I know, it is incapable of proof. In this way, it would seem, the contradiction in question can be avoided.¹³⁶

Die Grundlagendebatte bekam 1904 neue Impulse – zum einen durch die bereits geschilderten Ereignisse auf dem Internationalen Mathematikerkongress in Heidelberg, zum anderen durch den wenige Wochen später von ZERMELO publizierten ersten Beweis des Wohlordnungssatzes.¹³⁷ Im Mittelpunkt der Auseinandersetzungen stand der Nerv des ZERMELOSchen Beweises, die Verwendung des Auswahlaxioms. Es kann in diesem Zusammenhang auf [Mo 1982] verwiesen werden. Dort wird zunächst die implizite Verwendung des Auswahlaxioms vor ZERMELO behandelt und sehr ausführlich auf die Debatten um ZERMELOS Beweis und auf die weitere Entwicklung bis etwa 1940 eingegangen.

2.5 Die Bücher von Hessenberg, Young, Hobson und Shegalkin

Philosophischen Interessen seines Autors, insbesondere auch an Grundfragen der Mathematik, verdankt ein hervorragendes Lehrbuch der Men-

¹³⁵Ebd., S. 123–124.

¹³⁶[Rus 1903], S. 323.

¹³⁷[Z 1904].

genlehre seine Entstehung, GERHARD HESSENBERGS (1874–1925) *Grundbegriffe der Mengenlehre*.¹³⁸ HESSENBERG, Geometer und zur Zeit der Abfassung der *Grundbegriffe* Dozent an der Militärtechnischen Akademie in Berlin-Charlottenburg, hatte 1904 mit KARL KAISER und LEONARD NELSON die Zeitschrift *Abhandlungen der Friesschen Schule* ins Leben gerufen, deren Ziel es war, die Philosophie von JACOB FRIEDRICH FRIES (1773–1843) zu popularisieren und weiterzuentwickeln und insbesondere zu zeigen, daß FRIES und seine Schüler die rechtmäßigen Erben und Fortsetzer der kritischen Philosophie KANTS seien.

Im ersten Heft der *Abhandlungen der Friesschen Schule*¹³⁹ hatte HESSENBERG einen Aufsatz *Das Unendliche in der Mathematik* veröffentlicht, der einem gebildeten Publikum zeigen sollte, wie die Begriffe des unendlich Großen und des unendlich Kleinen in der Analysis und in der Geometrie korrekt benutzt werden und daß diese Begriffe frei von jeder Mystik sind. Auf einer Postkarte an NELSON schreibt HESSENBERG über diesen Aufsatz:

Das Niveau der Arbeit ist nicht à la Harden, hoffentlich nicht zu hoch für Euch Allesbequatscher und Nichtsversther von Philosophen.¹⁴⁰

Aus weiteren Briefen HESSENBERGS an NELSON geht hervor, daß die Herausgeber der *Abhandlungen der Friesschen Schule* sehr bald an einem empfindlichen Mangel an Artikeln litten; am 26 Juni 1905 schrieb HESSENBERG an NELSON:

Denn daß man auf Kommando keine anständige Arbeit schreiben kann, ist klar. Ich denke aber immerhin, ein Referat über Mengenlehre werde ich liefern können.¹⁴¹

Im Hinblick auf Ziel und Leserkreis der Zeitschrift hat sich HESSENBERG auf die allgemeine Mengenlehre konzentriert und insbesondere auch die damaligen Grundlagendebatten einbezogen, während er die Punktmengentheorie und ihre zahlreichen Anwendungen in verschiedenen Gebieten der Mathematik außer acht ließ.

In einem ersten Teil „Die Grundbegriffe der Teilung, Vergleichung und Ordnung“ führt HESSENBERG diese Begriffe abstrakt durch Postulate ein. Zum Beispiel soll die Beziehung „ A ist ein Teil von B “, welcher konkreten Art diese Beziehung auch sei, den folgenden Postulaten genügen:

I. Ist A Teil von B , B Teil von C , so ist A Teil von C .

II. Ist A echter Teil von B , so ist B kein Teil von A .

III. Ist A mit B identisch, so ist B kein echter Teil von A .

Die Postulate der Vergleichung sind genau die Forderungen an eine Äquivalenzrelation. Den Begriff der Ordnung will HESSENBERG nur für Bereiche einführen, in denen eine Äquivalenzrelation, bezeichnet mit „ \sim “, existiert. Dann ist bei HESSENBERG eine Ordnung durch die Forderungen definiert, die man heute

¹³⁸[He 1906].

¹³⁹Abhandlungen der Friesschen Schule. Neue Folge. Bd. I, Heft 1 (1904).

¹⁴⁰Nachlass Nelson. Friedrich-Ebert-Stiftung Bonn, Sign. 1/LNAA 000 270.

¹⁴¹Ebd.

an eine Halbordnung stellt, bei zusätzlicher Gültigkeit des Trichotomieaxioms: Entweder ist $A < B$ oder $B < A$ oder $A \sim B$.

HESSENBERG ist sich der Problematik des CANTORSchen Mengenbegriffes wohl bewußt, und er sieht auch den Ausweg, ohne ihn selbst zu beschreiten. Teil II „Äquivalenz, Teilmenge und Mächtigkeit“ beginnt mit der Bemerkung:

Den Begriff der Menge in völlig einwandfreier Weise zu definieren ist bisher nicht gelungen. Wahrscheinlich darf auch hier eine Definition nicht verlangt werden, sondern nur ein Axiomensystem. Aber selbst das fehlt bis jetzt noch.¹⁴²

HESSENBERG definiert in üblicher Weise, wann zwei Mengen „äquivalent“ oder „von gleicher Mächtigkeit“ sind. Im Teil II kommt er auch mit dieser Definition aus, im weiteren jedoch spricht er von Mächtigkeiten und führt für sie Bezeichnungen ein wie \aleph_0 , \aleph , \aleph_n , \aleph_ω usw., ohne daß der Begriff „Mächtigkeit“ definiert wird. Es lag hier in der Tat eine prinzipielle Schwierigkeit vor, die auch HAUSDORFF in den *Grundzügen* nicht überwinden konnte.¹⁴³

Bei der Definition von „unendlich“ umgeht HESSENBERG in Anlehnung an DEDEKIND den Rückgriff auf die natürlichen Zahlen und nennt eine Menge „transfinit“, wenn sie mit einer ihrer echten Teilmengen äquivalent ist. Es folgen dann Sätze über abzählbare Mengen und verschiedene Beispiele solcher Mengen, der DEDEKIND-BERNSTEINSche Äquivalenzsatz und der Satz, daß es zu jeder Menge M eine Menge \mathcal{M} von höherer Mächtigkeit als der von M gibt. Hierfür gibt HESSENBERG neben dem CANTORSchen einen weiteren davon wesentlich verschiedenen Beweis.

HESSENBERGs eigene originelle Beiträge zur Mengenlehre finden sich in den Teilen III und IV. Teil III unter dem Titel „Ähnlichkeit, Abschnitt und Ordnungstypus“ beginnt mit dem Begriff der Ordnung und der Definition der Ähnlichkeit zweier geordneter Mengen. Bei der Einführung des Begriffs des Ordnungstypus (und damit auch der Ordnungszahl) bietet sich dieselbe Schwierigkeit dar wie beim Kardinalzahlbegriff.

Den Begriff der Wohlordnung definierte HESSENBERG in der heute üblichen Weise. CANTORS ursprüngliche Definition war komplizierter. Die Eigenschaften wohlgeordneter Mengen deduzierte HESSENBERG aus dem ZERMELOSchen Lemma, welches hier mit ZERMELOS Erlaubnis erstmalig publiziert wurde, und aus dem Prinzip der transfiniten Induktion. Des antinomischen Charakters der „Menge aller Ordnungszahlen“ war sich HESSENBERG stets bewußt; er beginnt die Paragraphen über Ordnungszahlen mit folgenden Worten:

Wir wenden uns nun zur Betrachtung der Ordnungszahlen und werden dabei unsere Sätze stets so formulieren, daß wir nicht von der Menge aller Ordnungszahlen sprechen. Diese Menge enthält nämlich, wie wir später sehen werden, einen unaufgeklärten Widerspruch.¹⁴⁴

¹⁴²[He 1906], S. 501.

¹⁴³S. diesen Band, S. 634 ff.

¹⁴⁴[He 1906], S. 550.

Aus den allgemeinen Sätzen über wohlgeordnete Mengen folgt zunächst, daß zwei Ordnungszahlen der Größe nach stets vergleichbar sind. Grundlage des Weiteren sind die folgenden beiden Theoreme: I. Jede Menge von Ordnungszahlen ist, wenn man sie der Größe nach ordnet, wohlgeordnet. II. Zu jeder Menge M von Ordnungszahlen gibt es eine Ordnungszahl, welche größer ist als alle Zahlen von M und welche auf die Zahlen von M unmittelbar folgt. Nun geht HESSENBERG zur Einführung der Aleph-Reihe über:

Wir betrachten jetzt die Mächtigkeiten wohlgeordneter Mengen, wobei wir es wiederum vermeiden, von der Menge aller dieser Mächtigkeiten zu sprechen.¹⁴⁵

HESSENBERG betritt hier Neuland; in der Einleitung weist er darauf besonders hin mit der Bemerkung, daß sowohl CANTOR als auch SCHOENFLIES über die zweite Zahlklasse im wesentlichen nicht hinausgekommen sind.

Die Mächtigkeiten wohlgeordneter Mengen nennt HESSENBERG – CANTOR folgend – Alephs. Die Einführung der Aleph-Sequenz beruht auf den folgenden Sätzen, deren Grundlage die obigen Theoreme I und II für Ordnungszahlen sind: 1. Jede Menge von Alephs ist, der Größe nach geordnet, wohlgeordnet. 2. Zu jeder Menge M von Alephs gibt es ein nicht in ihr enthaltenes Aleph, welches das auf die Gesamtheit aller Elemente von M nächstfolgende Aleph ist. Mit der Aleph-Sequenz hat HESSENBERG auch die Zahlklassen und die Anfangszahlen, deren fundamentale Bedeutung sich in den weiteren Betrachtungen zeigt.

Zunächst bleibt bei HESSENBERG offen, ob alle Mächtigkeiten Alephs sind. Erst ganz am Ende seines Werkes behandelt er den ZERMELOSchen Beweis des Wohlordnungssatzes.¹⁴⁶ Im Anschluß daran heißt es:

Wenn das Auswahlpostulat zugegeben wird [...], so läßt sich der Wohlordnungssatz dahin aussprechen, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann. Die Konsequenzen dieses Satzes sind dann außerordentlich weittragende: jede Mächtigkeit ist ein Alef, es sind daher alle Mächtigkeiten komparabel, [...]¹⁴⁷

Am Schluß von Teil III hat HESSENBERG unabhängig von HAUSDORFF¹⁴⁸ den für die Theorie der geordneten Mengen grundlegenden Begriff der Konfinalität eingeführt, allerdings nicht in der Allgemeinheit wie HAUSDORFF in [H 1906 b] und mit einer Terminologie, die sich nicht durchgesetzt hat. Ist A eine Menge von Ordnungszahlen, $M \subseteq A$, und $A(M) = \{x \in A; x < m \text{ für ein } m \in M \text{ oder } x \in M\}$ (bei Hausdorff wäre dies $A^M + |M|$), so nennt HESSENBERG

¹⁴⁵Ebd., S. 552.

¹⁴⁶Auch HAUSDORFF hat in den *Grundzügen* den Wohlordnungssatz an das Ende der Betrachtungen über wohlgeordnete Mengen gerückt und mußte folglich zunächst Mächtigkeiten und Alephs unterscheiden. In seiner *Mengenlehre* von 1927 steht der Wohlordnungssatz an der Spitze.

¹⁴⁷[He 1906], S. 703.

¹⁴⁸Hausdorffs *Untersuchungen über Ordnungstypen I, II, III* ([H 1906b]) wurden auf der Sitzung der Königlich-Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig vom 26. 2. 1906 vorgelegt und am 20. 5. 1906 für druckreif erklärt. Aus HESSENBERGS Briefen an L. NELSON geht hervor, daß er im Mai 1906 die Fahnenkorrekturen seines Werkes gelesen hat.

M einen Kern von $A(M)$. Es ist dann $A(M)$ mit M konfinal in der HAUSDORFFSchen Terminologie. Unter den Ordnungstypen aller möglichen Kerne von $A(M)$ gibt es einen kleinsten; dieser ist eine (reguläre) Anfangszahl und wurde später als Konfinalität von $A(M)$ bezeichnet.

Teil IV „Der mengentheoretische Kalkül“ bringt zunächst die Definitionen der Rechenoperationen für Kardinal- und Ordinalzahlen und die Herleitung der entsprechenden Rechenregeln. Auf S. 575 findet sich der Satz über die Division mit Rest für Ordinalzahlen, ein Satz, den auch HAUSDORFF in [H 1906b] herleitet. HAUSDORFF entwickelte daraus die „Kettenbruchentwicklung“ für beliebige Paare von Ordinalzahlen (Euklidischer Algorithmus).

Als Hauptzahlen bezeichnet HESSENBERG Zahlen, die allen ihren Resten gleich sind; Beispiele sind die Anfangszahlen. Die Reihe der transfiniten Hauptzahlen beginnt mit ω , ω^2 , ω^3 , \dots ; allgemein ist die α -te Hauptzahl gerade ω^α . HESSENBERG zeigt dann, daß sich jede transfinite Ordinalzahl μ eindeutig in der Form

$$\mu = \omega^{\alpha_0} r_0 + \omega^{\alpha_1} r_1 + \dots + \omega^{\alpha_m} r_m$$

mit $\alpha_0 > \alpha_1 > \dots > \alpha_m$ und $r_i \in \mathbb{N}$ darstellen läßt. Er nennt dies die CANTORSche Normalform, weil CANTOR 1897 für die Zahlen der zweiten Zahlklasse eine solche Darstellung angegeben hatte. Die CANTORSche Normalform ist für HESSENBERG die Grundlage für die Einführung zweier neuer Operationen mit Ordnungszahlen, der „natürlichen Summe“ und des „natürlichen Produkts“ zweier transfiniten Zahlen. Diese Operationen hat man später als HESSENBERGSche Summe und HESSENBERGSches Produkt bezeichnet. Mittels der natürlichen Summe gelangt HESSENBERG zu einem Satz über Summen und Produkte von Alephs, der zu den bedeutendsten neuen Resultaten seines Buches zählt:

$$\text{Ist } \aleph_\alpha \geq \aleph_\beta, \text{ so gilt } \aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \aleph_\alpha;$$

insbesondere ist $n\aleph_\alpha = \aleph_\alpha^n = \aleph_\alpha$ für jede natürliche Zahl n . Zu diesem Satz bemerkt HESSENBERG:

In jüngster Zeit hat mir Herr ZERMELO einen Beweis mitgeteilt, der von dem hier gegebenen wesentlich verschieden ist und demnächst an anderer Stelle erscheinen wird.¹⁴⁹

Die Betrachtungen über δ -, ε - und ζ -Zahlen bei HESSENBERG laufen darauf hinaus, die kritischen Zahlen gewisser Normalfunktionen zu finden. Stetige monotone Funktionen $f(\alpha)$, deren Argumente und Funktionswerte Ordinalzahlen sind, betrachtete als erster OSWALD VEBLEN (1880–1960).¹⁵⁰ HAUSDORFF nannte solche Funktionen Normalfunktionen und entwickelte in den *Grundzügen* eine systematische Theorie ihrer kritischen Zahlen (das sind Zahlen α mit $\alpha = f(\alpha)$). HESSENBERGS δ -Zahlen sind die kritischen Zahlen von $f(\alpha) = 2^\alpha$, seine ε -Zahlen sind die kritischen Zahlen von $f(\alpha) = \omega^\alpha$ und die ζ -Zahlen schließlich die von $f(\alpha) = \omega_\alpha$, ω_α die α -te Anfangszahl.

¹⁴⁹[He 1906], S. 595.

¹⁵⁰S. diesen Band, S. 214.

In den Teilen V und VI („Prinzipielle Fragen. Erste Reihe“ und „Prinzipielle Fragen. Zweite Reihe“) widmet sich HESSENBERG vor allem den strittigen Grundlagenfragen der Mengenlehre. Er diskutiert insbesondere verschiedene Versionen des Auswahlaxioms und ZERMELOS Beweis des Wohlordnungssatzes, ohne sich im Streit um diesen Beweis festzulegen.¹⁵¹ Der Weg aus den Schwierigkeiten ist für HESSENBERG klar vorgezeichnet: Man muß die Prinzipien der Mengenbildung, insbesondere im Hinblick auf Komprehension, Potenz- und Belegungsmengenbildung sowie Auswahlprinzipien axiomatisch festlegen. Für die natürlichen Zahlen gibt HESSENBERG einen axiomatischen Aufbau. Für die allgemeine Mengenlehre hat er dies nicht versucht.¹⁵²

Die HESSENBERGSchen *Grundbegriffe der Mengenlehre* hätten zu ihrer Zeit ein ganz ausgezeichnetes Lehrbuch der allgemeinen Mengenlehre sein können. Ihr Abdruck in einer philosophischen Zeitschrift trug allerdings nicht gerade zu einer weiten Verbreitung bei. Zwar hatte der Verlag Vandenhoeck & Ruprecht auch eine gesondert gebundene Version als „Sonderdruck aus den Abhandlungen der Friesschen Schule“ herausgegeben, jedoch offenbar jede Werbung dafür unterlassen und es sogar versäumt, ein Exemplar an den *Jahresbericht der DMV* zu schicken. Jedenfalls beschwerte sich HESSENBERG mehrfach in Briefen an L. NELSON über dieses Verhalten des Verlages.¹⁵³ Die Kenner des Gebietes schätzten offenbar HESSENBERGs Werk. Nach der Rückreise von der Jahrestagung der DMV in Dresden schrieb er am 20. 9. 1907 an NELSON:

Ich bin gestern Abend von Dresden zurück, wo man mir vielerlei anerkennendes über m. Mengenlehre gesagt hat.¹⁵⁴

Die *Grundbegriffe der Mengenlehre* wurden allerdings im *Jahresbericht der DMV* nie besprochen; sie wurden nicht einmal unter den Rubriken „Bücherschau“ und „Bei der Redaktion eingegangene Schriften“ erwähnt. Die Besprechung von EUGEN MEYER im *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*¹⁵⁵ betont einseitig die Grundlagenfragen und negiert HESSENBERGs originelle Beiträge zur Theorie der transfiniten Zahlen.

Daß HESSENBERGs Werk kaum als Lehrbuch der Mengenlehre betrachtet wurde, mag auch darin begründet sein, daß er die Punktmengenlehre und ihre Anwendungen in den verschiedensten Gebieten der Mathematik nicht behandelte. Unter Mengenlehre verstand man damals aber stets beides, die allgemeine Mengenlehre und die Theorie der Punktmengen nebst ihren Anwendungen. HAUSDORFF beispielsweise nennt in den *Grundzügen* unter der Rubrik „Zusammenfassende Darstellungen der Mengenlehre“ HESSENBERG nicht, wohl aber das Buch von YOUNG ([YY 1906]), welches im Hinblick auf die Behandlung der allgemeinen Mengenlehre weit hinter HESSENBERG zurücksteht. Er zollt

¹⁵¹Näheres dazu bei [Mo 1982], S. 113–114.

¹⁵²S. auch diese Einführung, S. 45.

¹⁵³Nachlaß Nelson. Friedrich-Ebert-Stiftung Bonn, Sign. 1/LNAA 000 270. Briefe vom 28.2.1907 und 16.1.1908.

¹⁵⁴Ebd.

¹⁵⁵Band 37 (1906), S. 67–68.

HESSENBERG aber hohe Anerkennung, wenn er die Anmerkungen zum Kapitel über wohlgeordnete Mengen folgendermaßen einleitet:

Zur Theorie der wohlgeordneten Mengen vgl. außer CANTORS Beiträgen insbesondere G. HESSENBERG, Grundbegriffe der Mengenlehre (Göttingen 1906), die erste allgemein gehaltene Darstellung.¹⁵⁶

Das erwähnte Buch *The Theory of Sets of Points* von WILLIAM HENRY YOUNG und seiner Frau GRACE CHISHOLM YOUNG (1868–1944) erschien fast gleichzeitig mit HESSENBERGs Werk¹⁵⁷ und basiert auf 27 einschlägigen Arbeiten von W. H. YOUNG und einer Arbeit seiner Frau aus den Jahren 1902 bis 1906. Das Buch hat insgesamt 13 Kapitel. Kapitel 1 und 2 behandeln die Theorie der reellen Zahlen. Kapitel 3 bringt die Grundbegriffe der Theorie der linearen Punktmengen. In den Kapiteln 4–6 werden die linearen Punktmengen in Bezug auf Mächtigkeit, Inhalt und Ordnung untersucht. Kapitel 7 bringt einen fragmentarischen Abriß der Theorie der transfiniten Zahlen und die Kapitel 8–13 beschäftigen sich mit ebenen Mengen, insbesondere ebenen Kurven. Auf die Ausdehnung der Ergebnisse auf den \mathbb{R}^n wird gegebenenfalls jeweils hingewiesen.

Den YOUNGS gebührt das Verdienst, die erste ausführliche lehrbuchmäßige Darstellung des damals aktuellen Standes der Punktmengentheorie gegeben zu haben. Dies hebt auch SCHOENFLIES in seiner ansonsten nicht gerade sehr freundlichen Rezension hervor.¹⁵⁸ Die allgemeine Mengenlehre wird nur insoweit berücksichtigt, als sie für die Punktmengenlehre benötigt wird. Insbesondere wird versucht, den Gebrauch der transfiniten Ordinalzahlen möglichst weitgehend aus der Punktmengentheorie zu eliminieren – eine Absicht, die durchaus in die Zukunft wies.¹⁵⁹ Grundlagenfragen der Mengenlehre werden nicht berührt; es wird lediglich in wenigen Sätzen auf die Zweifel an der Existenz transfiniten Zahlen, welche über die zweite Zahlklasse hinausgehen, hingewiesen (S. 156). Im Vorwort betont YOUNG, den „professional mathematician“ im Blick:

Wherever he has to deal – and where does he not? – with an infinite number of operations, he is treading on ground full of pitfalls, one or more of which may well prove fatal to him, if he is unprovided by the clue to furnish which is the object of the present volume.

Dementsprechend wird besonderer Wert darauf gelegt, eine Reihe instruktiver Beispiele von Punktmengen zu präsentieren, welche – wie PEANOs Kurve – den durch naive Anschauung geprägten Vorstellungen gründlich widersprechen. Ein rezenter Historiker nennt das Buch der YOUNGS „an early catalogue of topological monsters.“¹⁶⁰ Die vielen Beispiele interessanter Punktmengen hebt auch LEBESGUE in seiner ansonsten recht kritischen Rezension hervor.¹⁶¹

¹⁵⁶[H 1914a], S. 455.

¹⁵⁷Das Vorwort ist unterzeichnet „May, 1906.“

¹⁵⁸[Sch 1908b], S. 333.

¹⁵⁹Vgl. [Ku 1922].

¹⁶⁰[Jo 1979], S. 172.

¹⁶¹[L 1907].

Zwei bedeutende neue Resultate sind besonders zu nennen. Da sind zum einen die Betrachtungen über Verzweigungspunkte von Kurven (forks; implizit auch der Begriff der Ordnung eines Kurvenpunktes: S. 219–222), woran später ZYGMUNT JANISZEWSKI (1888 – 1920), PAUL URYSOHN (1898 – 1924) und KARL MENGER (1902 – 1985) angeknüpft haben. Da ist zum anderen die Lösung des Kontinuumproblems für lineare G_δ -Mengen: Die YOUNGS zeigen, daß eine unendliche lineare G_δ -Menge entweder abzählbar oder von Kontinuumsmächtigkeit ist.¹⁶² Lineare G_δ -Mengen heißen bei den YOUNGS „ordinary limiting sets“; sie sind folgendermaßen definiert:

Given a series of sets of intervals, the set of all those points such that each is internal to at least one interval of every set of the series is called the *inner limiting set of the series of sets of intervals, or an ordinary limiting set*.¹⁶³

Diese komplizierte Wortdefinition weist, verglichen etwa mit HAUSDORFFS Definition einer G_δ -Menge, bereits auf eine große Schwäche des YOUNGSchen Buches hin, nämlich das fast vollständige Fehlen eines mengentheoretischen Kalküls und das fehlende Gespür für tragfähige allgemeine Begriffsbildungen.

The Theory of Sets of Points war kein Erfolg. GODEFREY HAROLD HARDY (1877–1947) schreibt in seinem Nachruf auf W. H. YOUNG:

It is curious that Young should never have written a really successful book. He wrote three, alone or in collaboration with his wife, the *Sets of points*, this tract [[Y 1910] – W. P.] (both ‚classics‘ which somehow hung fire) and a third book [...]¹⁶⁴

Zwischen *The Theory of Sets of Points* und HAUSDORFFS *Grundzügen* liegen zeitlich gesehen nur acht Jahre. Im Hinblick auf begriffliche Schärfe, auf Präzision und Modernität der Darstellung, auf Systematik in der Stoffanordnung sowie in bezug auf die Anzahl neuer Resultate und neuer tragfähiger Begriffsbildungen liegen zwischen diesen Büchern Welten. Besonders ins Auge springen in dem Werk der YOUNGS eine Reihe gekünstelt wirkender Begriffe, die verwickelte Fallunterscheidungen nach sich ziehen und die sich als nicht tragfähig erwiesen haben. Es verwundert deshalb nicht, daß *The Theory of Sets of Points* auf die Entwicklung der Topologie kaum Einfluß gehabt hat und von HAUSDORFFS *Grundzügen* vollkommen überschattet wurde. In den ersten 20 Bänden von *Fundamenta Mathematicae* wurde *The Theory of Sets of Points* nur in zwei Arbeiten zitiert, während HAUSDORFFS *Grundzüge* dort gewissermaßen omnipräsent waren (in den ersten 20 Bänden Zitate in 88 Arbeiten; näheres dazu s. u. im Abschnitt 3).

¹⁶²Zu HAUSDORFFS Verallgemeinerung dieses Satzes s. diesen Band, S. 779.

¹⁶³[YY 1906], S. 63.

¹⁶⁴[Ha 1943], S. 320. Mit „a third book“ ist [YY 1905] gemeint, ein Geometriebuch für Kinder, welches nur in England nicht erfolgreich war, jedoch ins Deutsche, Italienische, Ungarische und Schwedische übersetzt wurde. Daß *The Theory of Sets of Points* ein wichtiges historisches Dokument und in diesem Sinne ein „classic“ war, mag der Grund gewesen sein, daß das Buch 1972 bei Chelsea nachgedruckt wurde.

Die Bemerkungen über das Buch der YOUNGS dürfen nicht den Eindruck hinterlassen, als seien ihre Autoren keine erfolgreichen Mathematiker gewesen. W. H. und G. C. YOUNG haben in zahlreichen Arbeiten bedeutende Beiträge zur Theorie der Fourierreihen und zur Integrationstheorie geleistet.¹⁶⁵ Diese Arbeiten werden auch in *Fundamenta Mathematicae* in einer Reihe von Aufsätzen zitiert. HAUSDORFF hat sich in seinen nachgelassenen Papieren mehrfach mit YOUNGS Beiträgen zur Theorie der Fourierreihen beschäftigt. *The Theory of Sets of Points* wird nur in einem einzigen Faszikel erwähnt.¹⁶⁶ Dort wird Theorem 14 ([YY 1906], S. 91.) durch ein Gegenbeispiel widerlegt.

Ein Jahr nach YOUNGS *The Theory of Sets of Points* erschien in Cambridge (ebenfalls bei University Press) ERNEST WILLIAM HOBSONS (1856–1933) *The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier's Series* ([Ho 1907]), ein Buch, welches lange als ein Standardwerk galt und dessen erster Teil 1927 bereits in dritter Auflage herauskam. HOBSON widmete darin die Kapitel II und III im Umfang von 155 Seiten der Mengenlehre. Kapitel II behandelt die Punktmengenlehre und aus der allgemeinen Mengenlehre nur einige Grundtatsachen, welche zum Verständnis der Punktmengenlehre unbedingt erforderlich waren. Nach HOBSONS Intention sollte ein Leser, der sich hauptsächlich für die analytischen Teile seines Werkes interessierte, mit der Lektüre von Kapitel II die mengentheoretischen Grundlagen für ein solches Studium erlangen können. Für Leser, welche weitergehende Interessen hatten, bot Kapitel III einen Abriss der allgemeinen Mengenlehre (Kardinalzahlen, Ordnungstypen, Ordinalzahlen) einschließlich einer eingehenden Diskussion der Antinomien und der Grundlagenproblematik. HOBSON hatte die einschlägige Literatur bis etwa 1905 ziemlich vollständig verarbeitet; HESSENBERGS und HAUSDORFFS Arbeiten hatte er allerdings noch nicht zur Kenntnis genommen.

HOBSON hat mit den Kapiteln II und III seines Buches ein gut aufgebautes, flüssig und klar geschriebenes kleines „Lehrbuch“ der Mengenlehre vorgelegt. Das Kapitel über die Punktmengen ist besser lesbar als [YY 1906], und, obwohl viel kürzer, sind alle wichtigen Themen abgehandelt. Das Kapitel über allgemeine Mengenlehre geht über das Buch der YOUNGS hinaus. Neue Resultate sind in den mengentheoretischen Kapiteln des HOBSONSchen Werkes nicht enthalten.

Zur Grundlagenproblematik vertrat HOBSON den gleichen Standpunkt wie die französische Schule: Akzeptanz für alle mengentheoretischen Konzepte, welche man in Analysis und Geometrie „wirklich braucht“ bei gleichzeitig erheblichen Zweifeln am Sinn und an der Möglichkeit des widerspruchsfreien Aufbaus einer allgemeinen Mengenlehre mit Mengen beliebig großer Mächtigkeit (obwohl er eine solche Mengenlehre im Kapitel III skizziert hatte). Es heißt bei HOBSON:

An attempt to examine the structure of such a class of ordinal numbers, as that of the ω th class, with cardinal number \aleph_ω , or that of the

¹⁶⁵S. [YY 2000], insbesondere die Einführung von S. D. CHATTERJI.

¹⁶⁶NL HAUSDORFF : Kapsel 33 : Fasz. 222 vom 5. 1. 1913.

Ω th class, with cardinal number \aleph_Ω , will lead to the conviction that such conceptions are unlikely to prove capable of useful application in any branch of Analysis or of Geometry. Nevertheless, should inexorable logic compel us to contemplate the existence of such classes of objects, they would be a proper field of exploration; we have however seen that there are grave doubts as to whether this be in fact the case.¹⁶⁷

Den ZERMELOSchen Beweis des Wohlordnungssatzes lehnt HOBSON ab:

It thus appears that there is at present no sufficient reason for thinking that any unenumerable aggregate is capable of being normally ordered.¹⁶⁸

Ein weiteres Werk über reelle Funktionen im englischen Sprachraum war J. PIERPONTs *The Theory of Functions of Real Variables* ([Pi 1905/1912]). Der Band II (1912) enthält ein Kapitel über Punktmengen und zwei Kapitel über allgemeine Mengenlehre, insgesamt nur 67 Seiten. Es handelt sich dabei um eine ad hoc-Zusammenstellung der wichtigsten Tatsachen; von einem Lehrbuch der Mengenlehre kann hier nicht die Rede sein.

Ebenfalls 1907, im gleichen Jahr wie HOBSONs Buch, erschien in Moskau in russischer Sprache ein Werk, welches in mehrfacher Hinsicht originell und für seine Zeit ein ausgezeichnetes Lehrbuch der Mengenlehre war, IWAN IWANOWITSCH SHEGALKINS (1869–1947) *Transfinite Zahlen*. Das Buch war die Magisterdissertation des später als Logiker bekannt gewordenen Autors. Es wurde nicht übersetzt; sein Einfluß dürfte deshalb auf Rußland und Polen beschränkt gewesen sein. Im Text zitiert SHEGALKIN lediglich CANTOR, DEDEKIND und ZERMELO, im Vorwort erwähnt er als Quellen noch BERNSTEIN und PHILIPP JOURDAIN (1879–1919). Ein Literaturverzeichnis findet sich in dem Buch nicht, so daß weitgehend unklar bleibt, was SHEGALKIN gekannt hat und was nicht. Der umständliche Beweis des grundlegenden Satzes, daß eine wohlgeordnete Menge nie einem ihrer Abschnitte ähnlich sein kann, deutet darauf hin, daß SHEGALKIN HESSENBERGs Werk nicht kannte (dort findet man den üblichen kurzen Beweis mittels des Lemmas von ZERMELO).

Ebenso wie bei HESSENBERG scheint bei SHEGALKIN ein philosophisches und grundlagentheoretisches Interesse im Vordergrund gestanden zu haben.¹⁶⁹ In seinem Buch werden Anwendungen der Mengenlehre auf Punktmengen oder reelle Funktionen nicht einmal erwähnt. Die Mächtigkeit des Kontinuums kommt z. B. überhaupt nicht vor. Das Kontinuumproblem ist die rein mengentheoretische Frage nach dem Platz der Potenz 2^{\aleph_0} in der Alephreihe.

Ein Hauptanliegen von SHEGALKIN bestand darin, die Mengenlehre und insbesondere die Theorie der Kardinal- und Ordinalzahlen unabhängig vom Begriff

¹⁶⁷[Ho 1907], S. 202.

¹⁶⁸[Ho 1907], s. 205. „Normally ordered“ bedeutet „wohlgeordnet“.

¹⁶⁹SHEGALKIN hatte enge Beziehungen zu dem Mathematiker, Philosophen und Theologen PAVEL A. FLORENSKI (1882–1943), welcher sich besonders aus philosophischen und theologischen Gründen für CANTORS Mengenlehre interessierte und der 1904 in der Zeitschrift *Novy putch* (Neuer Weg) einen ersten Artikel in russischer Sprache über die Grundbegriffe der Mengenlehre veröffentlicht hatte. S. [Dem 1988].

des Endlichen oder Unendlichen aufzubauen. Erst wenn die allgemeine Theorie entwickelt ist, führt SHEGALKIN die Klasse der endlichen Mengen durch weitere Forderungen ein. Er will mit diesem Vorgehen die Zweifel an der Existenz der transfiniten Zahlen zerstreuen: Wenn man die Möglichkeit transfiniten Zahlen in Zweifel zöge, so müsse man im Ergebnis seines Werkes auch an den natürlichen Zahlen zweifeln.

SHEGALKIN betont im Kapitel 1 „Ding, Menge, Abbildung“, daß jede deduktive Wissenschaft von undefinierten Grundbegriffen ausgehen müsse. Für die Mengenlehre seien dies die Begriffe Ding (\equiv Gegenstand unseres Denkens), Menge, Enthaltensein eines Dinges in einer Menge und Abbildung. Er verwendet viel Mühe darauf (bis hin zu psychologischen Betrachtungen), dem Leser diese Begriffe plausibel zu machen. Bemerkenswert ist seine Argumentation, daß eine Vielheit (mnoshestwennostch) von Dingen noch keine Menge zu sein brauche; sie sei erst dann eine Menge, wenn sie sich als einheitliches Ganzes denken läßt.¹⁷⁰ Einen axiomatischen Aufbau versucht SHEGALKIN nicht.

Bei der Definition von Vereinigung und Durchschnitt legt SHEGALKIN Mengensysteme zugrunde, welche durch eine beliebige Indexmenge indiziert sind; die Indexmenge nennt er die Basis (osnowanije), über welche die Operationen zu erstrecken sind. Das Mengenprodukt von $\{A_i\}_{i \in I}$ wird dann ebenfalls ganz allgemein definiert als die Menge aller Funktionen $f : I \rightarrow \cup A_i$ mit $f(i) \in A_i$ für jedes i . Sind alle $A_i = A$, erhält man die Cantorsche Belegungsmenge A^I als Menge aller Funktionen $f : I \rightarrow A$. Ein solch allgemeiner Standpunkt erscheint hier erstmals in der Lehrbuchliteratur; durch HAUSDORFFS *Grundzüge* wurde er dann Standard. Viel Mühe verwendet SHEGALKIN darauf, seine Leser von der Wichtigkeit des Begriffs der leeren Menge zu überzeugen und den Unterschied zwischen a und $\{a\}$ klarzumachen.

Im Kapitel 2 „Äquivalenz, Mächtigkeit“ wird der Mächtigkeitsbegriff wie bei CANTOR eingeführt – an dieser Stelle wird CANTOR sogar wörtlich zitiert. Bemerkenswert ist hier wie im Kapitel 1 die Einführung indizierter Systeme von Mächtigkeiten und die Definition von Summe und Produkt für solche Systeme. Die Rechengesetze können dementsprechend ganz allgemein formuliert werden; z. B. lautet das Assoziativgesetz der Addition

$$\sum_{i \in I} m_i = \sum_{t \in T} \left\{ \sum_{j \in I_t} m_j \right\}; \quad I = \sum_{t \in T} I_t.$$

Im Kapitel 3 „Ordnung“ ist die Beschreibung einer Ordnung durch eine ordnende Paarmenge besonders bemerkenswert. Ein System geordneter Mengen $\{A_i\}_{i \in I}$ mit geordneter Indexmenge gibt Anlaß zur allgemeinen Summendefinition; das Produkt wird nur für zwei geordnete Mengen wie bei CANTOR definiert. Allgemeinere Produkte und Potenzen betrachtet SHEGALKIN nicht, was vermuten läßt, daß er HAUSDORFFS Arbeit [H 1906b] nicht kannte. Kapitel

¹⁷⁰Dies könnte ein Rekurs auf [Rus 1903] sein, wo RUSSELL zwischen „classes as many“ und „classes as one“ unterscheidet.

5 behandelt die Ordnungstypen und ihre Arithmetik, Kapitel 6 die wohlgeordneten Mengen. SHEGALKIN bringt ZERMELOS Beweis des Wohlordnungssatzes, läßt aber dem Leser sozusagen die Wahl, ob er den Beweis, d. h. die Benutzung des Auswahlaxioms, akzeptiert oder nicht. Dementsprechend muß im folgenden stets angegeben werden, wenn Sätze auf dem Wohlordnungssatz fußen.

Nachdem im Kapitel 6 die allgemeine Theorie der Ordnungszahlen entwickelt ist, behandelt Kapitel 7 „Endliche Mengen und Zahlen“. Eine wohlgeordnete Menge heißt endlich, wenn jede nichtleere Teilmenge (also auch die Menge selbst) ein letztes Element hat. Die Ordnungszahl einer endlichen Menge heißt eine endliche Zahl. Aus der allgemeinen Ordinalzahlarithmetik werden nun durch Spezialisierung auf endliche Mengen die Gesetze der Arithmetik natürlicher Zahlen hergeleitet. Die Überlegung, daß die Menge der natürlichen Zahlen nicht endlich sein kann, führt auf die abzählbaren Mengen, die in Kapitel 8 untersucht werden. Kapitel 9 bringt den Satz von der Vergleichbarkeit der Kardinalzahlen; entsprechend seiner Haltung zum Wohlordnungssatz betont SHEGALKIN hier, daß für das gesamte Kapitel dessen Gültigkeit angenommen werden muß.

In den Kapiteln 10 und 11 werden die Zahlen der zweiten Zahlklasse, insbesondere ihre arithmetischen Eigenschaften, untersucht. Auch hier ist die Darstellung auf der Höhe der Zeit und vorzüglich gelungen. Den Euklidischen Algorithmus für Ordinalzahlen scheint SHEGALKIN unabhängig von HAUSDORFF gefunden zu haben, da er – wie bereits erwähnt – [H 1906b] vermutlich nicht kannte.

Kapitel 12 ist überschrieben „Die Menge aller Zahlen und Alephs“. Daß SHEGALKIN in diesem Kapitel laufend von der Menge W aller Ordinalzahlen und der Menge aller Alephs spricht, ist merkwürdig inkonsequent, da er im nächsten Kapitel, in welchem die Antinomien der Mengenlehre besprochen werden, auseinandersetzt, daß die Auffassung von W als Menge, der man dann wieder eine Ordinalzahl zuordnen könnte, zum Widerspruch führt. Die Auffassung von W als Menge steht auch in deutlichem Kontrast zu den Thesen, die SHEGALKIN am Schluß seines Buches formuliert und die vermutlich bei der Verteidigung seiner Dissertation diskutiert worden sind. An Substanz enthält Kapitel 12 die allgemeine Einführung der Zahlklassen und der Alephreihe sowie die Alephrelationen

$$\aleph_\lambda + \aleph_\mu = \aleph_\mu; \quad \aleph_\lambda \aleph_\mu = \aleph_\mu \quad \text{jeweils für } \lambda \leq \mu.$$

Aus letzterer zieht SHEGALKIN den Schluß, daß für Nichtlimeszahlen λ eine Summe von Zahlen $< \omega_\lambda$ über eine Menge von Summanden $< \omega_\lambda$ selbst kleiner ω_λ ist. Verallgemeinert auf reguläre ω_λ findet man diesen Satz bei HAUSDORFF ([H 1914a], S. 132, Theorem IV).

Im Kapitel 13 wird zunächst die Potenzmenge einer Menge betrachtet und die Frage aufgeworfen, ob $2^a (> a)$ die auf a nächstfolgende Kardinalzahl ist oder nicht. Dann heißt es

Leider konnten die Schwierigkeiten, welche auf dem Weg zur Lösung dieses Problems liegen, bis jetzt mit den gegenwärtigen Methoden der

Mathematik nicht überwunden werden.¹⁷¹

Insbesondere könnte $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ oder $> \aleph_1$ sein. Aus dem Satz von KÖNIG, daß aus $\mathfrak{m}_1 < \mathfrak{m}_2 < \dots$

$$\sum \mathfrak{m}_i < \prod \mathfrak{m}_i$$

folgt, schließt SHEGALKIN, daß sich aus der Annahme $2^{\aleph_0} > \aleph_k$ für jedes natürliche k auch $2^{\aleph_0} > \aleph_\omega$ ergibt.¹⁷² Der Zusammenhang von 2^{\aleph_0} mit dem Kontinuum und CANTORS Kontinuumhypothese werden überhaupt nicht erwähnt.

SHEGALKIN bringt auch BERNSTEINS Rekursionsformel

$$\aleph_\mu^{\aleph_\beta} = \aleph_\mu \cdot 2^{\aleph_\beta},$$

formuliert nur für natürliche Zahlen μ als Index, was nicht der allgemeinste Fall ihrer Gültigkeit, aber (im Gegensatz zur Formulierung bei BERNSTEIN) korrekt ist. HAUSDORFFS allgemeinere Rekursionsformel von 1904 erwähnt er nicht.

Die Aufzählung verschiedener Versionen der mengentheoretischen Antinomien leitet SHEGALKIN mit folgendem Satz ein:

Im Verlaufe der Entwicklung der Mengenlehre wurde man mit einer Reihe von Paradoxien konfrontiert, deren Lösung noch nicht in befriedigender Weise gelungen ist.¹⁷³

Am Schluß des Buches stehen Thesen, die ganz bemerkenswerte Formulierungen enthalten, die aber leider ohne jede nähere Erläuterung des darin vorkommenden Begriffes „Klasse“ und seines Unterschiedes zum Begriff „Menge“ formuliert sind; trotzdem seien einige zitiert:

6. Es ist notwendig, den Begriff der Menge von dem Begriff der Klasse zu unterscheiden.
7. Die Existenz der Menge aller endlichen Zahlen, wie auch die der Menge aller Zahlen eines beliebigen Alephs, muß postuliert werden.
8. Alle Zahlen [die Gesamtheit der Ordinalzahlen – W. P.] bilden eine Klasse, aber keine Menge.¹⁷⁴

Im gleichen Jahr wie das Buch von SHEGALKIN erschien in Rußland auch ein Werk über Punktmengen.¹⁷⁵ Es war ähnlich wie das Werk von SCHOENFLIES

¹⁷¹[Sh 1907], S. 332.

¹⁷²Von SHEGALKIN stammt auch diejenige Verallgemeinerung des ursprünglichen KÖNIGSchen Satzes, die heute in den Lehrbüchern als Satz von KÖNIG bezeichnet wird: Ist $\mathfrak{a}_i < \mathfrak{b}_i$, $i \in I$, so folgt

$$\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i < \prod_{i \in I} \mathfrak{b}_i.$$

Auch hier kommt seine allgemeine Auffassung von Summen und Produkten zum Tragen. Unabhängig von SHEGALKIN hat auch ZERMELo in [Z 1908b] diese allgemeine Version des KÖNIGSchen Satzes bewiesen.

¹⁷³[Sh 1907], S. 342.

¹⁷⁴[Sh 1907], unpaginierte letzte Seite.

¹⁷⁵[Ne 1907]. Das Buch hatte 254 Seiten und erschien als extra gebundener Auszug aus den Nachrichten des polytechnischen Instituts in Tomsk. Es war – wie im Fall SHEGALKINS – die Dissertation des Verfassers.

hauptsächlich ein Bericht über die historische Entwicklung und den derzeitigen Stand der Punktmengenlehre des \mathbb{R}^1 mit einigen Beiträgen des Autors über geordnete Mengen.

2.6 Schoenflies' Bericht von 1908. Sierpińskis *Zarys teorii mnogości*

Im Vorwort vom September 1900 zu seinem Bericht über Mengenlehre¹⁷⁶ hatte SCHOENFLIES davon gesprochen, daß das damals Vorliegende der erste größere Teil des Gesamtberichts sei, ohne sich näher über den Plan des zweiten Teils zu äußern. Dieser zweite Teil erschien dann 1908 als Ergänzungsband zum Jahresbericht der DMV.¹⁷⁷ Er war vor allen Dingen den „geometrischen Anwendungen“ der Mengenlehre gewidmet. Darunter verstand SCHOENFLIES ein Forschungsprogramm, zu dem er selbst für den Fall der euklidischen Ebene hervorragende Beiträge geleistet hat, und dessen Ziel darin bestand, die Geometrie des euklidischen Raumes im Sinne der Analysis Situs als eine gegenüber der Arithmetik eigenständige Disziplin zu entwickeln.¹⁷⁸ Im Vorwort seines Berichts heißt es dazu:

Sie [die Mengenlehre – W. P.] hat die verschiedensten Gebiete befruchtet und überall Spuren erfolgreichsten Wirkens hinterlassen.

Die Geometrie hat ihren Einfluß wohl am spätesten erfahren. Dies wird befremden; ist doch die Mengenlehre wesentlich auf geometrischem Boden erwachsen. In der Tat haben sich ihre ersten Begriffe und Sätze fast ausschließlich auf die Theorie der Punktmengen bezogen. Aber die Geometrie mußte erst wieder lernen, sich auf sich selbst und auf ihre Ebenbürtigkeit mit der Arithmetik zu besinnen. Dieser Prozeß hat erst unlängst begonnen; wir danken ihn der axiomatischen Wendung, die durch HILBERT methodisch eingeleitet wurde. Sein Ziel kann kein anderes sein, als die Geometrie, soweit sie Gestaltenlehre ist, an der Hand geometrischer, anschaulicher Axiome auf mengentheoretischer Basis aufzubauen.¹⁷⁹

Neben einem Einstieg in dieses Programm beabsichtigte SCHOENFLIES in dem Bericht auch die Fortschritte darzustellen, die auf dem Gebiet der Mengenlehre seit Erscheinen des ersten Teiles seines Berichtes erzielt worden waren.

Im Kapitel I „Allgemeine Mengenlehre“ bringt SCHOENFLIES u.a. den Kettenbruchalgorithmus für Ordinalzahlen (nach HESSENBERG und HAUSDORFF), die Alephrelationen von ZERMELO und HESSENBERG sowie HAUSDORFFS Rekursionsformel für die Aleph-Potenzen. Des weiteren erwähnt er den Satz von CANTOR-BERNSTEIN-(HAUSDORFF), daß die Klasse der abzählbaren Ordnungstypen die Mächtigkeit des Kontinuums hat, wodurch

die Frage, welche Beziehung das Kontinuum zur Menge \aleph_1 hat, [...] eine neue Gestalt gewonnen [hat].¹⁸⁰

¹⁷⁶[Sch 1900].

¹⁷⁷[Sch 1908a].

¹⁷⁸Das Studium der Topologie des \mathbb{R}^n ist in gewissem Sinne ein eigenständiges Forschungsgebiet geblieben; s. dazu z. B. [D 1986].

¹⁷⁹[Sch 1908a], S. 1.

¹⁸⁰Ebd., S. 24.

Am Ende des ersten Kapitels behandelt SCHOENFLIES Grundlagenfragen. Die Antinomien der Mengenlehre nimmt er nicht ernst; er bezeichnet sie als „scheinbare Paradoxien“, welche dadurch zustande kämen,

daß man sich entweder widerspruchsvoller Begriffe bedient oder aber widerspruchslose Begriffe in widerspruchsvoller Weise benutzt.¹⁸¹

SCHOENFLIES ist z. B. der Ansicht, daß RUSSELLS Schlußweise $M \in M \Leftrightarrow M \notin M$ für $M =$ Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten, fehlerhaft sein müsse und so RUSSELLS Antinomie „logisch aufgelöst“ sei. Er habe es generell für geboten gehalten,

die bisher bekannt gewordenen Antinomien zergliedernd aufzulösen und zu zeigen, daß in sie widerspruchsvolle Begriffe eingehen, und daß sie deshalb jenseits des wissenschaftlichen Denkens liegen¹⁸², [...]

Das Kapitel II „Geordnete Mengen“ beginnt mit einem Hinweis auf HAUSDORFFS Begriff der gestuften Menge in [H 1901b]. Dann heißt es:

Wir verdanken HAUSDORFF auch die sonstigen Fortschritte, die wir über geordnete Mengen besitzen.¹⁸³

Fast das gesamte Kapitel ist der Darstellung der Ergebnisse HAUSDORFFS in den Arbeiten [H 1901b], [H 1904a], [H 1906b] und [H 1907 a-b] gewidmet. Ferner werden nichtarchimedisch geordnete Körper (VERONESE, LEVI-CIVITA, HÖLDER) besprochen.

Im Kapitel III „Allgemeine Theorie der Punktmengen“ werden vor allem die seit 1900 erzielten grundlegenden Fortschritte in der Theorie von Inhalt und Maß behandelt.

SCHOENFLIES' Zugang zu den „geometrischen Anwendungen“ der Mengenlehre in den Kapiteln IV–VI hat drei Grundlagen: 1. den Begriff des Polygons und einen rein geometrischen „Anordnungssatz“ für Polygone, der auf dem Axiom von PASCH¹⁸⁴ beruht und dessen Aussage auf Polygone ausdehnt, 2. die Begriffe und Sätze der Punktmengentheorie CANTORScher Prägung und 3. sogenannte „Größenbegriffe“ wie Flächeninhalt einer meßbaren Menge, Abstand zweier kompakter Mengen, approximierende Polygone usw. Im Kapitel IV werden zunächst grundlegende Begriffe wie Zusammenhang, Kontinuum, punkthafte Menge, linienhaftes Kontinuum, Gebiet, Gebietsgrenze, Zusammenhangszahl eines Gebietes u. a. definiert und untersucht. Ein zentraler Begriff ist hier der der „geschlossenen Kurve“. Eine kompakte Teilmenge C der Ebene heißt bei SCHOENFLIES eine geschlossene Kurve, wenn sie die Ebene in zwei Gebiete zerlegt, deren gemeinsame Grenze sie ist. Eine solche Menge C ist perfekt,

¹⁸¹Ebd., S. 26.

¹⁸²Ebd., S. 39.

¹⁸³Ebd., S. 40.

¹⁸⁴Ein Dreieck C teilt die Ebene in zwei Gebiete I (Inneres) und A (Äußeres), so daß zwei Punkte von I oder zwei Punkte von A stets durch einen Streckenzug verbunden werden können, der ganz zu I bzw. A gehört, während ein Streckenzug, der $p \in A$ mit $q \in I$ verbindet, mindestens einen Punkt von C enthält.

linienhaft und zusammenhängend. Neben solchen richtigen Resultaten finden sich im Kapitel IV auch mehrere Fehler. Nennt man eine kompakte Teilmenge C des \mathbb{R}^n eine absolute Gebietsgrenze, wenn C den \mathbb{R}^n zerlegt und gemeinsame Grenze aller Komponenten von $\mathbb{R}^n \setminus C$ ist, so legt die Anschauung nahe, daß für eine absolute Gebietsgrenze C in der Ebene die Komponentenzahl von $\mathbb{R}^2 \setminus C$ gleich 2 ist, ein solches C also eine geschlossene Kurve im SCHOENFLIESSchen Sinne ist. Dies hatte SCHOENFLIES auch „bewiesen“. In einer aufsehen erregenden Arbeit¹⁸⁵ zeigte LUITZEN EGBERTUS JAN BROUWER (1881–1966), daß es in der Ebene absolute Gebietsgrenzen C gibt, für die $\mathbb{R}^2 \setminus C$ drei oder sogar abzählbar viele Komponenten hat. Damit waren auch weitere Sätze von SCHOENFLIES hinfällig, z. B. daß jedes beschränkte einfach zusammenhängende Gebiet durch seine Grenze eindeutig bestimmt ist.

Im Kapitel V geht es um die Untersuchung invarianter Eigenschaften bei stetigen Abbildungen („weitere Gruppe“) bzw. bei Homöomorphismen („engere Gruppe“); das Wort „Homöomorphismus“ benutzt SCHOENFLIES noch nicht. Hier erzielte er, besonders im Umfeld des Jordanschen Kurvensatzes, Ergebnisse (die z. T. auf seinen früheren Arbeiten beruhten), von denen weit in die Zukunft weisende Impulse ausgingen. Der Jordansche Kurvensatz besagt, daß jedes homöomorphe Bild von S^1 eine geschlossene Kurve im SCHOENFLIESSchen Sinne ist. Die umgekehrte Frage, wann eine geschlossene Kurve topologisch eine Kreislinie ist, kann mit Hilfe des SCHOENFLIESSchen Begriffes der Erreichbarkeit eines Punktes beantwortet werden. Ist G ein Gebiet der Ebene und t ein Punkt seiner Begrenzung, so heißt t für G erreichbar, wenn t mit einem $x \in G$ durch einen Bogen verbunden werden kann, der (mit Ausnahme von t) ganz in G verläuft. Die Umkehrung des Jordanschen Satzes lautet dann: Eine geschlossene Kurve C im SCHOENFLIESSchen Sinne, für die jeder Punkt von C für jedes der beiden Gebiete von $\mathbb{R}^2 \setminus C$ erreichbar ist, ist homöomorphes Bild von S^1 .

Der Jordansche Kurvensatz sagt nichts Näheres über die topologische Struktur der beiden Gebiete und über die Lageeigenschaften einer geschlossenen Jordankurve in der Ebene. Diese Lücke kann SCHOENFLIES schließen: Jeder Homöomorphismus von C auf den Rand S^1 der Einheitskreisscheibe läßt sich zu einem Homöomorphismus der Ebene auf sich erweitern, der das innere Gebiet von C auf das Innere von S^1 und das äußere Gebiet von C auf das Äußere von S^1 abbildet. Nach vergeblichem Versuch, diesen „SCHOENFLIES-Satz“ auch für den dreidimensionalen Raum zu beweisen, entdeckte J. W. ALEXANDER 1924 ein Gegenbeispiel, seine berühmte „gehörnte Sphäre“, die homöomorph zu S^2 ist, deren Außengebiet im \mathbb{R}^3 jedoch nicht homöomorph zum Außengebiet der Kugel ist.

Im Kapitel VI „Die stetigen Kurven“ geht es vor allem um das Problem, notwendige und hinreichende Bedingungen dafür zu finden, daß eine ebene Punktmenge stetiges Bild von $[0, 1]$ ist. Die Bedingungen, die SCHOENFLIES schließlich fand, waren ziemlich kompliziert. HANS HAHN (1879–1934) und STEFAN MAZURKIEWICZ (1888–1945) haben später eine sehr durchsichtige Charakte-

¹⁸⁵[Br 1910].

risierung der stetigen Streckenbilder gegeben; s. dazu HAUSDORFF [H 1927a], S. 207.

Im Kapitel „Die Kurvenmengen und der Funktionalraum“ resümiert SCHOENFLIES schließlich die einschlägigen Arbeiten von ARZELA, ASCOLI, VOLTERRA und vor allem von FRÉCHET, ohne jedoch eine Synthese dieser neueren Forschungen mit der Punktmengentheorie des \mathbb{R}^n anzustreben und so zu einem allgemeinen Raumbegriff zu gelangen.

Die SCHOENFLIESSchen Berichte [Sch 1900, 1908a] haben für die Rezeption und Popularisierung der Mengenlehre vor dem ersten Weltkrieg viel geleistet. Sie waren und sind auch heute noch wertvolle Quellen wegen ihrer zahlreichen historischen und literarischen Angaben. Für die Entwicklung der Topologie hat der zweite Teil des Berichtes bedeutende Impulse gegeben. Das betrifft insbesondere Bemühungen, Sätze vom Typ des o. g. „SCHOENFLIES-Satzes“ in höheren Dimensionen zu studieren.¹⁸⁶ Ferner haben SCHOENFLIES' Untersuchungen der stetigen Streckenbilder den späteren Arbeiten polnischer und amerikanischer Topologen über Peano-Kontinua wichtige Anregungen gegeben.¹⁸⁷ Aber auch SCHOENFLIES' Fehler haben sich als außerordentlich produktiv erwiesen: In einer eingehenden historischen Analyse der BROUWERSchen Arbeiten heißt es:

To give SCHOENFLIES his due, however, we must not forget that he had provided BROUWER with an important set of problems upon which to work. Much of BROUWER's subsequent research in topology had its problem source in SCHOENFLIES' theory.¹⁸⁸

SCHOENFLIES' Bericht von 1908 war im Oktober 1907 fertiggestellt und konnte so zwei Arbeiten nicht mehr berücksichtigen, welche 1908 erschienen und tiefgreifenden Einfluß auf die weitere Entwicklung der Mengenlehre hatten, nämlich ZERMELOS Axiomatisierung der Mengenlehre [Z 1908b] und seinen zweiten Beweis des Wohlordnungssatzes [Z 1908a]. In [Z 1908b] wurde erstmals ein Axiomensystem der Mengenlehre vorgelegt und damit ein entscheidender Schritt zur Erledigung der Antinomienproblematik getan. Allerdings hatte ZERMELOS System noch eine Schwachstelle, das war der vage Begriff der „definiten Eigenschaft“.¹⁸⁹ G. HESSENBERG gehörte zu den wenigen Mathematikern, die sofort die große Bedeutung von ZERMELOS Axiomatisierung sahen.

¹⁸⁶S. dazu Abschnitt 3.4 dieser Einführung; s. auch [Rush 1973].

¹⁸⁷Eine eingehende Würdigung von SCHOENFLIES' Forschungsprogramm findet man in [Wi 1949], S. 12–16.

¹⁸⁸[Jo 1981], S. 129. BROUWER hatte über Lie-Gruppen gearbeitet und dabei zunächst SCHOENFLIESSche Resultate benutzt, bis er schließlich bemerkte, daß diese falsch sind. Das bewog ihn zu einem tiefen Studium grundlegender Probleme der Topologie, welches in den Jahren 1910–1913 zu bahnbrechenden Ergebnissen führte. (Satz von der Invarianz der Dimension, Verallgemeinerung des Jordanschen Kurvensatzes auf den \mathbb{R}^n , Existenz absoluter Gebietsgrenzen in \mathbb{R}^2 , die $\mathbb{R}^2 \setminus C$ in mehr als 2 Komponenten zerlegen, Lösung des 5. Hilbertproblems für eindimensionale Mannigfaltigkeiten, Fixpunktsätze, fundamentale Begriffe wie Abbildungsgrad und simpliziale Approximation). Eine wesentliche Quelle für BROUWER waren auch die Arbeiten von POINCARÉ.

¹⁸⁹Eine Kritik dieser Schwachstelle findet sich bei SKOLEM [Sk 1922] und FRAENKEL [Fr 1922], [Fr 1923], S. 196 ff. Diese Forscher waren es auch, die das ZERMELOSche Axiomensystem

In seiner Arbeit über *Kettentheorie und Wohlordnung* aus dem Jahre 1909 heißt es eingangs:

Die vorliegenden Untersuchungen sind axiomatischer Art, d. h. sie beschäftigen sich mit der Frage nach der Tragweite der aus den einzelnen Axiomen der Mengenlehre zu ziehenden Folgerungen.¹⁹⁰

Im Hinblick auf die Antinomien der Mengenlehre schreibt HESSENBERG:

Diese sind durch die von Herrn Zermelo angegebenen Axiome ausgeschaltet; ich gehe daher von diesen Axiomen aus.¹⁹¹

Der zweite ZERMELOSche Beweis des Wohlordnungssatzes beruhte auf DEDEKINDs Begriff der Kette und arbeitete dadurch klarer den formalen Charakter der Wohlordnung unabhängig von jeder räumlich-zeitlichen Anordnung heraus. Ferner benutzte ZERMELO die Gelegenheit, die umfangreiche Diskussion, die über seinen ersten Beweis von 1904 in der mathematischen und philosophischen Literatur der Jahre 1904–1907 geführt worden war, prägnant zusammenzufassen, ausführlich zu allen Gegenargumenten Stellung zu nehmen und so die Debatte von seiner Seite aus zu einem gewissen Abschluß zu bringen.

Man kann sagen, daß abgesehen von einigen entschiedenen Gegnern (wie BOREL, POINCARÉ oder BROUWER mit seinen Anhängern) die Mathematiker Auswahlaxiom und Wohlordnungssatz zunehmend akzeptierten. So konnte ERNST STEINITZ (1871–1928) den Schlüsselsatz seiner Theorie der Körper, nämlich daß es zu jedem Körper bis auf Äquivalenz eindeutig genau einen algebraisch abgeschlossenen algebraischen Erweiterungskörper gibt, nur mit Hilfe des Wohlordnungssatzes beweisen. Nach und nach trat ein, was STEINITZ 1910 im Hinblick auf das Auswahlprinzip prophezeit hatte:

Mit der zunehmenden Erkenntnis, daß es Fragen in der Mathematik gibt, die ohne dieses Prinzip nicht entschieden werden können, dürfte der Widerstand gegen dasselbe mehr und mehr schwinden.¹⁹²

Es sei noch angemerkt, daß HAUSDORFF in dem für die Mengenlehre so wichtigen Jahr 1908 die schon S.13 erwähnte 70 Seiten starke zusammenfassende Darstellung seiner Forschungen über geordnete Mengen veröffentlichte ([H 1908]). Sie erschien im selben Band der Mathematischen Annalen wie ZERMELOS Arbeiten, geschrieben im Stile eines Lehrbuchs, mit Inhaltsverzeichnis und

zu dem später weitgehend akzeptierten Axiomensystem ZSF ergänzten. S. dazu [Fe 1979], S. 3–8 und S. 49–91.

¹⁹⁰[He 1909], S. 81.

¹⁹¹Ebd., S. 81.

¹⁹²[Ste 1910], S. 8. Einen vorzüglichen Überblick über äquivalente Aussagen zum Auswahlaxiom (71 solche Aussagen) und über Implikationen des Auswahlaxioms (382, oft mit zahlreichen äquivalenten Sätzen) in den verschiedensten mathematischen Disziplinen gibt das Buch *Consequences of the Axiom of Choice* ([HowRub 1998]). Gleichzeitig zeigt es die intensive Arbeit mit schwächeren Axiomen, die keinen Sinn hätte, würde man das Auswahlaxiom als notwendigen Bestandteil der Mathematik betrachten, wie es vielleicht STEINITZ vorgeschwebt hat.

Register, und in der Überschrift schon den Titel seines Lehrbuchs vorwegnehmend: *Grundzüge einer Theorie der geordneten Mengen*.¹⁹³

Einigen Aufschluß über die Stellung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen innerhalb des Gesamtgebietes der Mathematik gibt das seit 1868 existierende mathematische Referatenjournal, das *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*. Die Arbeiten über Mengenlehre wurden bis 1904 im Kapitel „Philosophie“ des Abschnittes „Geschichte, Philosophie und Pädagogik“ referiert. Im Jahre 1905 gab es in diesem Abschnitt erstmalig ein eigenes Kapitel „Mengenlehre“. Ab dem Kriegsband 1916–1918 war Mengenlehre ein eigener Abschnitt, in der Hierarchie also gleichberechtigt mit Abschnitten wie „Arithmetik und Algebra“, „Geometrie“ oder „Mechanik“. Daneben hatte es seit 1870 bis 1914/15 im Abschnitt Geometrie ein Kapitel „Kontinuitätsbetrachtungen (Analysis Situs)“ gegeben, welches 1916/18 in „Kontinuitäts- und mengentheoretische Betrachtungen“ und 1925 schließlich in „Topologie“ umbenannt wurde. Die Frequenz der Arbeiten im Kapitel „Mengenlehre“ hatte 1905 und 1906 mit 33 bzw. 35 Arbeiten einen Höhepunkt, um in den Jahren 1907–1914 bei nicht allzugroßen Schwankungen auf einen Durchschnitt von etwa 20 Arbeiten abzusinken.

Wenn man die Lehrbuchsituation Revue passieren läßt, so war bis ins erste Jahrzehnt des 20. Jahrhunderts noch kein eigenständiges Lehrbuch erschienen, welches das *Gesamtgebiet der Mengenlehre im damaligen Verständnis*, d. h. allgemeine Mengenlehre und Theorie der Punktmengen einschließlich Inhalts- und Maßtheorie, systematisch und umfassend dargestellt hätte. Auch das 1912 in polnischer Sprache erschienene kleine Lehrbuch der Mengenlehre (*Zarys teorii mnogości*, d. h. Abriss der Mengentheorie; 158 Seiten) von WACŁAW SIERPIŃSKI (1882–1969) kann nicht als ein solches Werk betrachtet werden, obwohl es sowohl allgemeine Mengenlehre als auch die Theorie der Punktmengen enthielt. Es war vor allem für Anfänger gedacht und basierte auf einer 1909 in Lemberg gehaltenen Vorlesung. Im Vorwort bezeichnet es SIERPIŃSKI als Ziel seines Buches, die wichtigsten Methoden und Ergebnisse der Mengenlehre möglichst einfach darzustellen. Die Mengenlehre sei für alle Mathematiker nötig; darüber hinaus sei sie für Philosophen von Interesse. Er habe sein Buch so geschrieben, daß außer minimalen mathematischen Kenntnissen und einer gewissen Fähigkeit zum abstrakten Denken keine weiteren Voraussetzungen nötig seien, so daß es Studenten im ersten Jahr bereits studieren könnten. Die zahlreichen Anwendungen der Mengenlehre habe er nicht behandeln wollen, weil dann das Buch um ein Vielfaches umfangreicher und für Anfänger zu schwierig geworden wäre. Entsprechend dieser Zielstellung geht SIERPIŃSKIS Buch in der allgemeinen Mengenlehre kaum über das hinaus, was schon in CANTORS *Beiträgen zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* ([C 1895/97]) steht. Zum Beispiel behandelt das Kapitel über wohlgeordnete Mengen und Ordnungszahlen nur die zweite Zahlklasse (die höheren Alephs werden gar nicht erwähnt). Auch ZERMELOS Wohlordnungssatz kommt nicht vor. Eine methodische Besonderheit ist

¹⁹³ Abgedruckt im Band I dieser Edition.

der konsequente Aufbau der Punktmengentheorie, die auf den \mathbb{R}^n beschränkt bleibt, ohne transfiniten Ordinalzahlen. SIERPIŃSKI'S Buch wurde nicht in andere Sprachen übersetzt und dürfte wegen der Sprachbarriere über Polen hinaus nicht bekannt geworden sein; jedenfalls wurde es im *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* nicht einmal angezeigt.

Mit den *Grundzügen der Mengenlehre* von HAUSDORFF lag schließlich das erste Lehrbuch vor, das alle Gebiete, die man damals zur Mengenlehre rechnete, systematisch behandelte. Es ist bemerkenswert, daß HAUSDORFF'S Werk selbst wesentlich dazu beigetragen hat, daß es auch *das letzte derartige Buch* war, zumindest in einer allgemein zugänglichen Sprache.¹⁹⁴ Denn die von HAUSDORFF als eigenständige Disziplin etablierte allgemeine Topologie entwickelte sich nach dem ersten Weltkrieg sehr rasch und erforderte eigene Lehrbücher. Auch die Maß- und Integrationstheorie und die Theorie der reellen Funktionen spalteten sich als eigenständige Disziplinen von der Mengenlehre ab. Lehrbücher der Mengenlehre handelten in der Folgezeit vor allem von der allgemeinen Mengenlehre; zunehmend wurden die Axiomatik und die Beziehungen zur Logik zum Kernthema.

2.7 Schoenflies' Buch von 1913 im Vergleich mit Hausdorffs *Grundzügen*

1913, wenige Monate vor Erscheinen der *Grundzüge*, brachte A. SCHOENFLIES eine vollkommen überarbeitete und stark erweiterte Fassung des ersten Teiles seines Mengenberichts [Sch 1900] heraus. Für das Projekt der Neubearbeitung seines Berichtes hatte er in H. HAHN einen hervorragenden Kenner der Materie als Partner gewonnen. Das neue Werk sollte aus zwei Teilen bestehen. Der erste, von SCHOENFLIES bearbeitete Teil ([Sch 1913]) enthielt die allgemeine Mengenlehre und die Theorie der Punktmengen. Der zweite Teil, von HAHN bearbeitet, sollte die Theorie der reellen Funktionen enthalten, ferner ein Kapitel über die Axiomatik der Mengenlehre. Dieser zweite Teil konnte wegen des ersten Weltkrieges nicht mehr erscheinen. HAHN verwendete seine Vorarbeiten, um 1921 bei Springer ein eigenständiges Werk *Theorie der reellen Funktionen* herauszugeben (ohne das Kapitel über Axiomatik). Mengentheoretisch fußte dieses Werk schon ganz auf HAUSDORFF'S *Grundzügen*; HAUSDORFF hatte auch die Korrekturen mitgelesen.

[Sch 1913] sollte nach wie vor eine

eigenartige Mischung von historischem Bericht und methodischem Lehrbuch¹⁹⁵

sein, wie SCHOENFLIES im Vorwort betonte. Das Werk hatte aber in der Tat mehr den Charakter eines Lehrbuchs angenommen. Ihm war in Bezug auf Prä-

¹⁹⁴W. SIERPIŃSKI hatte 1923 eine stark erweiterte Ausgabe seines *Zarys teorii mnogości* herausgebracht; 1928 erschien der *Zarys* nochmals erweitert in zwei Bänden: *Liczby przekończone* (Transfiniten Zahlen) und *Topologia ogólna* (Allgemeine Topologie). Die meisten Mathematiker nahmen dieses Werk allerdings als zwei völlig verschiedene Bücher wahr: Band 1 erschien 1928 in Paris in französischer Übersetzung, Band 2 1934 in Toronto in englischer Übersetzung (s. dazu Abschnitt 3.2).

¹⁹⁵[Sch 1913], S. IV.

zision der Darstellung zweifellos die Mitwirkung von HAHN und besonders die von BROUWER zugute gekommen, welche SCHOENFLIES im Vorwort hervorhebt. HAUSDORFF betrachtete das SCHOENFLIESSche Buch ein wenig als Konkurrenz zu seinen *Grundzügen*. In dem bereits erwähnten Brief an HILBERT vom 27. 2. 1914 schrieb er im Hinblick auf die *Grundzüge*:

Leider ist mir Schoenflies zuvorgekommen, dessen zweite Auflage immerhin wesentlich besser ist als die erste.¹⁹⁶

SCHOENFLIES' Buch war ohne Zweifel das bis dahin umfassendste Buch über Mengenlehre und die beste Gesamtschau auf den erreichten Stand der Theorie. Allerdings war es dem damals schon 60-jährigen Autor nicht gelungen, neue methodische bzw. begriffliche Gesichtspunkte einzuführen oder neue eigene Resultate vorzulegen. SCHOENFLIES hatte mit seinem Werk das Pech, daß wenige Monate später mit HAUSDORFFS *Grundzügen* ein weit aus überlegenes Lehrbuch erschien, welches sein Buch schließlich vollkommen überschattete. Warum das so war, wird aus dem folgenden Vergleich beider Werke deutlich werden. Dabei beschränken wir uns – was die *Grundzüge* betrifft – auf allgemeine Bemerkungen, da in den Anmerkungen zum Text der *Grundzüge* (S. 577 ff) und in den kommentierenden Essays (S. 619 ff) die inhaltlichen Details und insbesondere HAUSDORFFS Innovationen ausführlich behandelt werden.

In den Kapiteln über allgemeine Mengenlehre präsentiert SCHOENFLIES inhaltlich große Teile des damals aktuellen Standes. SCHOENFLIES' Darstellung ist jedoch völlig traditionell und läßt deutlich erkennen, daß er die Mengenlehre als eine mathematische Teildisziplin unter vielen und nicht – wie HAUSDORFF – als „Fundament der gesamten Mathematik“ betrachtete (dazu hatte sich SCHOENFLIES 1911 explizit geäußert; s. u.). So beginnt er mit Kardinalzahlen und behandelt dann in gesonderten Kapiteln abzählbare Mengen, die Vergleichbarkeit der Kardinalzahlen und überabzählbare Mengen. Es folgen die Theorie der geordneten Mengen (Ordnungstypen) und die der wohlgeordneten Mengen (Ordnungszahlen). Unter seiner Absicht, auch historisch Bericht zu erstatten, leidet des öfteren die Systematik der Darstellung. So präsentiert er – wohl als Zugeständnis an die historische Entwicklung und an die Kritiker der allgemeinen Theorie der höheren Zahlklassen – ein separates Kapitel über die zweite Zahlklasse. Dies ist aus Sicht der allgemeinen Theorie der Ordnungszahlen in keiner Weise gerechtfertigt und zeitigt das Resultat, daß sich vieles hier behandelte im Kapitel „Allgemeine Theorie der transfiniten Ordnungszahlen“ wiederholt. Ähnlich liegen die Dinge bei der Anwendung der transfiniten Induktion, und man könnte noch eine Reihe weiterer Beispiele nennen. Ausführlicher ist SCHOENFLIES gegenüber HAUSDORFF in Bezug auf die Ordinalzahlarithmetik (Hauptzahlen, Primzahlzerlegung), ferner bei der Darstellung der wichtigen Ergebnisse von PAUL MAHLO (1883–1971), den HAUSDORFF lediglich im Anhang kurz erwähnt, obwohl sich MAHLO in seinen Arbeiten di-

¹⁹⁶NL HILBERT, Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek zu Göttingen, Handschriftenabteilung, Nr. 136.

rekt an HAUSDORFFS Untersuchungen über geordnete Mengen angeschlossen hatte.¹⁹⁷

Im Teil über die Punktmengetheorie beschränkt sich SCHOENFLIES auf die Punktmengetheorie des \mathbb{R}^3 :

Die Punktmengetheorie, die wir betrachten, sind Punktmengetheorie des gewöhnlichen euklidischen Raumes.¹⁹⁸

In einer Fußnote merkt er an, daß man alles auch auf den \mathbb{R}^n übertragen könne. Dann heißt es in der Fußnote weiter:

Die Punktmengetheorie des \mathbb{R}_∞ von unendlich vielen Dimensionen bleiben hier außer Betracht; für sie vgl. Bericht II ([Sch 1908a] – W. P.), S.83 ff.¹⁹⁹

SCHOENFLIES macht keinerlei Versuch einer Synthese hin zu einem allgemeineren Raumbegriff. Er stellt die Punktmengetheorie durchaus auf dem aktuellen Stand dar; z. B. werden – wenn möglich – Begriffe und Sätze der Punktmengetheorie des \mathbb{R}^1 auf beliebige Ordnungstypen übertragen. Die Darstellung ist aber vollkommen traditionell und fußt zum großen Teil noch auf dem CANTORSchen Ableitungsbegriff. Die Überschriften der einzelnen Kapitel belegen dies ausreichend: I. Einige Hilfssätze über Grenzpunkt und Stetigkeit, II. Die Ableitungen, III. Struktur und Mächtigkeit der Punktmengetheorie, IV. Die abgeschlossenen und perfekten Mengen, V. Inhalt und Meßbarkeit der Punktmengetheorie, VI. Beispiele und Anwendungen.

Die Beziehungen der Mengenlehre zur Logik und die Antinomienproblematik hat SCHOENFLIES bewußt ausgeklammert, wie er im Vorwort betont. Er verweist jedoch öfter auf seine Arbeit *Über die Stellung der Definition in der Axiomatik* ([Sch 1911]), in der er seine Ansichten zu Grundlagenfragen dargestellt hat. SCHOENFLIES meint dort, daß die Mengenlehre „allmählich in philosophisches Fahrwasser geraten“ sei und deshalb „die zwingende Kraft, die der mathematischen Schlußweise innewohnt, zu einem Teile verloren“ habe. Als Vertreter der philosophischen Richtung nennt er PEANO, RUSSELL und HESSENBERG. Auch ZERMELO sei „innerlich durch die Arbeiten beeinflusst, die von den philosophischen Mengentheoretikern herrühren.“ Er wirft HESSENBERG und ZERMELO vor, daß sie nur Mengen zulassen wollen, die man mittels der Axiome aus vorhandenen Mengen ableiten kann, wobei man a und $\{a\}$ unterscheiden müsse. Diese Forscher seien „augenscheinlich eingeschüchtert . . . durch das Gespenst der Russellschen Mengen und ähnlicher Paradoxa.“ SCHOENFLIES ist – im Gegensatz zu HAUSDORFF – nicht der Meinung, daß die Mengenlehre das Fundament der Mathematik ist:

Die Mengenlehre kann unmöglich die Aufgabe haben, bei der axiomatischen Grundlegung ihrer Begriffe und Beziehungen auch das gesamte

¹⁹⁷S. dazu [GotKre 1984].

¹⁹⁸[Sch 1913], S. 229.

¹⁹⁹Ebd., S. 229.

Gebiet der Arithmetik und Analysis vor ihr Forum zu ziehen. Sie muß sich darauf stützen können, daß sie gewisse Hilfsbegriffe von den andern Wissenschaften entlehnt, insbesondere also den *Funktionsbegriff* und das ihm äquivalente ZERMELOSche *Aussonderungsprinzip*.²⁰⁰

Abschließend plädiert SCHOENFLIES dafür, die Mathematik solle „die Erledigung der Paradoxa ruhig dem Philosophen überlassen.“ Er beendet die Arbeit mit dem Motto: „Für den Cantorismus, aber gegen den Russellismus!“

SCHOENFLIES stand mit seinen Ausführungen einem platonistischen Standpunkt, wie CANTOR ihn vertreten hatte, sehr nahe. Obwohl sich HAUSDORFF zu dieser Arbeit nicht geäußert hat, war er damit gewiß nicht einverstanden. Es braucht auch kaum erwähnt zu werden, daß SCHOENFLIES mit diesen bereits 1911 antiquierten Ansichten keine Resonanz gefunden hat.

HAUSDORFFs Buch atmet den Geist einer neuen Zeit. An die Spitze der Darstellung der allgemeinen Mengenlehre stellt er eine ausführliche Mengenalgebra mit z. T. neuen, zukunftsweisenden Konzepten (Differenzenketten, Mengenringen und Mengenkörper, δ - und σ -Systeme). Diese Einführungskapitel über Mengen und ihre Verknüpfungen stellen sozusagen die mathematische Sprache der Zukunft bereit; sie sind auch für alle Mathematiker von Interesse, die für ihre Arbeit in keiner Weise transfinite Zahlen benötigen. Insbesondere gelingt es HAUSDORFF, den Funktionsbegriff mengentheoretisch zu begründen.²⁰¹ Gegenüber SCHOENFLIES erreicht HAUSDORFF auf der Grundlage seiner Einführungskapitel eine viel bessere kalkülmäßige Durchdringung und eine prägnantere Darstellung des gesamten Stoffes.

Die großen thematischen Abschnitte (Kardinalzahlen, Ordnungstypen, Ordinalzahlen) beginnt HAUSDORFF mit den allgemeinen Begriffen, entwickelt die Theorie systematisch und schreitet dann gegebenenfalls zu speziellen Beispielen und Anwendungen fort. Inhaltlich geht er in dem Kapitel „Beziehungen zwischen geordneten und wohlgeordneten Mengen“ bei einer Reihe von Themen weit über SCHOENFLIES hinaus (z. B. Element- und Lückencharaktere in Komplexmengen und Produkten, η_α -Mengen²⁰², nichtarchimedische Ordnungen und HAHNScher Einbettungssatz).

Die Überlegenheit von HAUSDORFFs *Grundzügen* gegenüber dem SCHOENFLIESschen Werk wird besonders im Teil über die Punktmengen deutlich. Hier wird eine allgemeine Theorie axiomatisch entwickelt, welche die alte Punktmengenlehre als sehr speziellen Fall enthält. Der zentrale Begriff dieser Theorie, der HAUSDORFFsche Begriff des topologischen Raumes, ist eine großartige Synthese aus verschiedenen Entwicklungen.²⁰³ Auf der Basis dieses allgemeinen Raumbegriffes werden dann grundlegende Begriffe und Sätze der klassischen

²⁰⁰[Sch 1911], S. 249.

²⁰¹S. dazu den Artikel *Zum Begriff der Funktion*, dieser Band S. 621–633.

²⁰²S. dazu den Artikel über HAUSDORFFs Theorie der η_α -Mengen und ihre Wirkungsgeschichte, dieser Band, S. 645–674.

²⁰³Dies wird eingehend im Artikel *Zum Begriff des topologischen Raumes*, dieser Band, S. 675–744, dargestellt. Die verschiedenen Abschwächungen und Verschärfungen des HAUSDORFFschen Trennungsaxioms behandelt der Artikel *Trennungsaxiome*, dieser Band, S. 745–751.

Punktmengenlehre – soweit möglich – auf den allgemeinen Fall übertragen und damit zum Bestandteil der neu geschaffenen Topologie. Aber HAUSDORFF leistet nicht nur diese „Übersetzungsarbeit“, sondern er entwickelt dabei auch grundlegende Konstruktionsverfahren der Topologie wie Kernbildung (offener Kern, insichdichter Kern) und Hüllenbildung (abgeschlossene Hülle), und er arbeitet die fundamentale Bedeutung des Begriffs der offenen Menge („Gebiet“) und des von FRÉCHET eingeführten Kompaktheitsbegriffs heraus. Er entwickelt ferner die Theorie des Zusammenhangs, insbesondere durch Einführung der Komponenten bzw. Quasikomponenten.²⁰⁴ Mittels des ersten und schließlich des zweiten Abzählbarkeitsaxioms werden die betrachteten Räume schrittweise weiter spezialisiert.²⁰⁵ Eine große Klasse von Räumen, die dem ersten Abzählbarkeitsaxiom genügen, bilden die metrischen Räume. HAUSDORFF entwickelt ihre Theorie ausführlich und bereichert sie durch eine Reihe neuer Konzepte (Hausdorff-Metrik, Vervollständigung, Totalbeschränktheit, ρ -Zusammenhang, reduzierbare Mengen).²⁰⁶ Mit den vollständigen separablen metrischen Räumen kommt HAUSDORFF den Eigenschaften der euklidischen Räume schon näher, auf welche er anschließend kurz eingeht. Den Abschluß der Punktmengenkapitel bilden Ausführungen über die euklidische Ebene (u.a. der Jordansche Kurvensatz).

Auch die Paragraphen über Abbildungen und über Maß- und Integrations- theorie bestehen durch die Allgemeinheit des eingenommenen Standpunktes und die Originalität der Darstellung.²⁰⁷ Der Anhang schließlich enthält das wohl spektakulärste Einzelresultat des ganzen Buches, nämlich HAUSDORFFS Satz, daß man im \mathbb{R}^n für $n \geq 3$ nicht auf allen beschränkten Teilmengen einen Inhalt definieren kann. Der Beweis beruht auf HAUSDORFFS paradoxer Kugelerlegung, für deren Herstellung man das Auswahlaxiom benötigt. Satz und Beweis hat HAUSDORFF gleichzeitig auch in den *Mathematischen Annalen* veröffentlicht.²⁰⁸

Im Verlaufe des 20. Jahrhunderts wurde es zum Standard, mathematische Theorien mengentheoretisch - axiomatisch aufzubauen. Die axiomatische Methode wirkte dabei, was ihre Zielstellung betraf, in verschiedenen Richtungen. Zum einen ging es darum, existierende Theorien axiomatisch zu begründen, wie es HILBERT für die euklidische Geometrie und ZERMELO für die Mengenlehre getan hatten. Zum anderen diente die Schaffung axiomatisch begründeter allgemeiner Theorien dazu, den gemeinsamen strukturellen Kern aus verschiedenen konkreten Fällen oder Teilgebieten herauszuschälen und dann eine abstrakte Theorie aufzustellen, die alle diese Teile als Spezialfälle enthielt und die so einen großen Gewinn an Vereinfachung, Vereinheitlichung und damit letztlich an Denkökonomie mit sich brachte. HAUSDORFF selbst hat diesen Gesichts-

²⁰⁴S. dazu den Artikel *Zusammenhang*, dieser Band, S. 752–756.

²⁰⁵Zu den Abzählbarkeitsaxiomen und den Separabilitätseigenschaften von Räumen s. den Artikel *Abzählbarkeitsaxiome*, dieser Band, S. 757–761.

²⁰⁶S. dazu die entsprechenden Kommentare, dieser Band, S. 762–787.

²⁰⁷S. dazu den Kommentar „Maß- und Integrationstheorie“, dieser Band, S. 788–800.

²⁰⁸Wiederabdruck mit ausführlichem Kommentar im Band IV dieser Edition, S. 3 – 18.

punkt besonders hervorgehoben (*Grundzüge*, S. 211.)²⁰⁹

In der Algebra haben wir mit E. STEINITZ' Theorie der Körper ([Ste 1910]) und mit A. FRAENKELS Ringtheorie ([Fr 1914]) erste Beispiele solcher axiomatischer Theorien. Allgemeingut wurde die abstrakte Auffassung in der Algebra erst durch das Wirken von EMMY NOETHER (1882–1935) und ihrer Schule²¹⁰; die erste lehrbuchmäßige Darstellung war VAN DER WAERDENS zweibändige *Moderne Algebra* von 1930/31.

In der Topologie stammen erste Versuche axiomatischer Raumtheorien von MAURICE FRÉCHET (1878–1973) ([Fré 1906]) und von FRIEDRICH RIESZ (1880–1956) ([Ri 1907]). Beide waren aber noch nicht zu einer weit genug entwickelten Theorie gekommen.²¹¹ Die topologischen Kapitel der *Grundzüge* brachten somit nicht nur eine Reihe einschlägiger neuer Begriffe und Resultate, sondern sie waren auch methodisch eine Pionierleistung und insofern richtungsweisend für die gesamte moderne Mathematik.

Die sich in dieser methodischen Neuorientierung manifestierende Auffassung vom Wesen der Mathematik hatte sich HAUSDORFF schon viele Jahre vor Niederschrift der *Grundzüge* gebildet, ja sogar geraume Zeit vor den Veröffentlichungen von FRÉCHET und RIESZ. Eine sehr wichtige Anregung dazu dürfte von den *Grundlagen der Geometrie* ausgegangen sein, die D. HILBERT 1899 veröffentlicht hatte. Wir wissen aus einem Brief HAUSDORFFS an HILBERT vom 12.10.1900, wie stark er davon beeindruckt war.²¹² HAUSDORFF betrachtet es als großen Fortschritt, daß sich die Geometrie zu seiner Zeit – nicht zuletzt unter dem Eindruck von HILBERTS *Grundlagen der Geometrie* – immer mehr als autonome Wissenschaft verstand. Indem HILBERT die Geometrie nicht als Wissenschaft vom „wirklichen“ Raum, sondern als reines Gedankengebilde auffaßt, überwindet er die Heteronomie der Geometrie und schafft eine autonome Wissenschaft. In einem etwa 1904/1905 entstandenen Fragment, überschrieben mit „Der Formalismus“, schreibt HAUSDORFF:

In der ganzen philosophischen Discussion seit Kant ist die Mathematik, oder wenigstens die Geometrie, stets als heteronom behandelt worden, als abhängig von einer fremden Instanz, die wir, nähere Bestimmung vorbehalten, als *Anschauung* bezeichnen können, mag es nun reine oder empirische, subjective oder wissenschaftlich corrigirte, angeborene oder erworbene Anschauung sein. Von dieser Abhängigkeit sich zu befreien, aus der Heteronomie zur Autonomie sich durchzukämpfen war die wichtigste *principielle* Aufgabe der modernen Mathematik, zu deren Lösung allerdings mehr der innere Betrieb und die thatsächlichen Leistungen dieser Wissenschaft als ihr schon längst etwas erkaltetes Bedürfnis nach

²⁰⁹Es ist bemerkenswert, daß noch im Jahre 1922 STEFAN BANACH (1892 – 1945) ganz ähnlich wie HAUSDORFF argumentierte, um seine axiomatische Einführung der normierten linearen Räume zu rechtfertigen. ([Ba 1922], S. 134).

²¹⁰S. [Co 1996].

²¹¹Näheres zu FRÉCHET und RIESZ s. dieser Band, S. 701 ff.

²¹²HAUSDORFF schreibt darin, daß er sich zu den „aufrichtigen Bewunderern“ der HILBERTSchen Schrift zählt und daß deren Lektüre einen „höchstgesteigerten Criticismus ... als philosophische Grundstimmung hinterlässt.“ (NL HILBERT, Nr. 136.)

philosophischer Verständigung gedrängt haben.²¹³

Eine autonome Mathematik muß von indefiniblen Grundbegriffen und von Axiomen ausgehen; ihre Sätze werden durch Deduktion nach den Gesetzen der formalen Logik bewiesen. Dazu heißt es in HAUSDORFFS Vorlesung *Zeit und Raum* aus dem Wintersemester 1903/04²¹⁴:

Die Mathematik sieht vollständig ab von der actualen Bedeutung, die man ihren Begriffen geben, von der actualen Gültigkeit, die man ihren Sätzen zusprechen kann. Ihre indefiniblen Begriffe sind willkürlich gewählte Denkobjecte, ihre Axiome willkürlich, jedoch widerspruchsfrei gewählte Beziehungen zwischen diesen Objecten. Die Mathematik ist Wissenschaft des reinen Denkens, gleich der formalen Logik.²¹⁵

Und im Hinblick auf die mathematische Schicht des Raumbegriffes²¹⁶ heißt es:

Also: der Raum eine logische Construction, nämlich Inbegriff aller Sätze, die logisch folgen aus den willkürlich gewählten Axiomen, wobei die vorkommenden Begriffe willkürlich gewählte Denkelemente sind.²¹⁷

In dem oben genannten Formalismus-Fragment schreibt HAUSDORFF dazu:

Die reine Mathematik, die „freie“, autonome Mathematik betrachtet Gedankendinge, Symbole von unbestimmter Bedeutung, die keinem andern Zwange als dem der logischen Denkbarkeit, der Widerspruchsfreiheit unterworfen sind. Sobald diesen Symbolen ein actueler Sinn beigelegt wird, eine Beziehung zur Wirklichkeit, treiben wir angewandte Mathematik.²¹⁸

HAUSDORFF besitzt eine klare Einsicht in das Wesen von Grundbegriffen, Definitionen, Axiomen und Sätzen einer solchen autonomen Mathematik:

Definition und Deduction [sind] keine absoluten Bestimmungen, sondern Relationen eines Begriffs zu andern Begriffen, eines Urtheils zu andern Urtheilen [. . .], wobei also zuletzt primitive Elemente, d. h. unerklärte Begriffe und unbewiesene Urtheile (Axiome) übrig bleiben müssen. Man wird in der Auswahl dieser Elemente einen gewissen Spielraum haben und ihre Anzahl, falls daran etwas liegt, auf ein Minimum herabdrücken können, aber völlig zu vermeiden sind sie keineswegs.²¹⁹

Insbesondere darf sich die so verstandene Mathematik nicht auf die Anschauung als Beweisgrund stützen:

²¹³NL HAUSDORFF : Kapsel 49 : Fasz. 1067, Bl. 6–7.

²¹⁴Sowohl das oben genannte Formalismus-Fragment, als auch die Vorlesung *Zeit und Raum* werden im Band VI dieser Edition vollständig abgedruckt.

²¹⁵NL HAUSDORFF : Kapsel 24 : Fasz. 71, Bl. 4.

²¹⁶S. dazu diesen Band, S. 690 ff.

²¹⁷Ebd., Bl. 31.

²¹⁸NL HAUSDORFF : Kapsel 49 : Fasz. 1067, Bl. 4.

²¹⁹Ebd., Bl. 8–9.

Die Anschauung ist ungenau, beschränkt, irreführend, individuell, wandelbar, während die Mathematik genau, unbeschränkt, zuverlässig, allgemein, unveränderlich sein soll.²²⁰

HAUSDORFF war in seiner Kritik der Anschauung jedoch keineswegs dogmatisch; er schätzte ihren großen heuristischen und pädagogischen Wert. So heißt es in der Vorlesung *Zeit und Raum*:

Sie [die Anschauung – W. P.] hat unschätzbaren heuristischen, pädagogischen, illustrativen Werth, suggerirt uns neue Ideen, hilft Verwickeltes mit einem Blicke übersehen, prägt sich mit unvergleichlicher Lebhaftigkeit dem Gedächtnisse ein; aber sie beweist nichts, noch nicht einmal die Denkbarkeit des Angeschauten.²²¹

Wenn man die obigen Zitate Revue passieren läßt, könnte man zunächst verwundert sein, daß HAUSDORFF keinen Versuch gemacht hat, „das Fundament des Fundamentes“ (*Grundzüge*, S.1) auch zu sichern, d. h. die Mengenlehre selbst axiomatisch aufzubauen. Er kannte natürlich ZERMELOS Axiomatisierung, hielt diesen Versuch aber noch nicht für abgeschlossen:

Den [...] notwendigen Versuch, den Prozeß der uferlosen Mengenbildung durch geeignete Forderungen einzuschränken, hat E. ZERMELO unternommen. Da indessen diese äußerst scharfsinnigen Untersuchungen noch nicht als abgeschlossen gelten können und da eine Einführung des Anfängers in die Mengenlehre auf diesem Wege mit großen Schwierigkeiten verbunden sein dürfte, so wollen wir hier den naiven Mengenbegriff zulassen, dabei aber tatsächlich die Beschränkungen innehalten, die den Weg zu jenem Paradoxon abschneiden.²²²

Gewiß wird es HAUSDORFF nicht entgangen sein, daß ZERMELOS Begriff der „definiten Eigenschaft“ an Präzision zu wünschen übrig ließ. Im weiteren Verlauf der *Grundzüge* geht HAUSDORFF auf Grundlagenfragen nicht mehr ein. Bei der Herleitung seines Kugelparadoxons beispielsweise benutzt er das vieldiskutierte Auswahlaxiom, ohne es überhaupt zu nennen.²²³

3. Zur Rezeption der *Grundzüge der Mengenlehre*

3.1 Allgemeine Bemerkungen. Die *Fundamenta Mathematicae*

HAUSDORFFS *Grundzüge* erschienen – wie schon erwähnt – im April 1914, in einer bereits spannungsgeladenen Zeit am Vorabend des 1. Weltkrieges. Im August 1914 begann der Krieg, der auch das wissenschaftliche Leben in Europa in dramatischer Weise in Mitleidenschaft zog. Unter diesen Umständen

²²⁰Ebd., Bl. 9.

²²¹NL HAUSDORFF : Kapsel 24 : Fasz. 71, Bl. 56.

²²²[H 1914a], S. 2.

²²³HAUSDORFFS Stellung zu den Grundlagendebatten wird in [H 1908] besonders deutlich; es sei in diesem Zusammenhang auf den entsprechenden Kommentar im Band I dieser Edition verwiesen.

konnte HAUSDORFFS Buch in den ersten fünf bis sechs Jahren nach seinem Erscheinen kaum wirksam werden. Es mag auch eine Rolle gespielt haben, daß nach wie vor nur ganz wenige der etablierten Mathematiker auf dem Gebiet der Mengenlehre forschten, so daß erst nach dem Kriege von einer neuen, jungen Forschergeneration die zukunftsweisenden Impulse der *Grundzüge* aufgenommen wurden. Jedenfalls nahm man in den führenden deutschen mathematischen Fachzeitschriften bis weit nach dem 1. Weltkrieg von HAUSDORFFS Buch überhaupt keine Notiz. So werden die *Grundzüge* in den *Mathematischen Annalen* bis Band 82 (1921) von niemand zitiert, ausgenommen von HAUSDORFF selbst in seiner berühmten Arbeit *Dimension und äußeres Maß*.²²⁴ Im *Journal für die reine und angewandte Mathematik* werden die *Grundzüge* erstmals im Band 155 (1926) zitiert. Es ist auch bemerkenswert, daß dieses wichtige Buch im Jahresbericht der DMV nicht besprochen wurde, so daß HAUSDORFF 1917 schließlich zur Selbsthilfe griff und eine Selbstanzeige einrücken ließ.²²⁵

Immerhin gab es eine ganze Reihe von Rezensionen der *Grundzüge*.²²⁶ Eine erste erschien bereits 1914 im *Literarischen Zentralblatt für Deutschland*. Dort wurden [H 1914a], [Sch 1913] und [Koe 1914] gemeinsam besprochen. Der Teil über die *Grundzüge* ist inhaltlich dürftig und beschränkt sich im wesentlichen auf die Aufzählung von Themen. 1915 gab es drei Rezensionen, eine zwar freundliche, aber nicht sehr detaillierte von HEINRICH WIELEITNER (1874–1931) in der *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht*, eine von dem Wiener Funktionentheoretiker WILHELM GROSS (1886–1918) in *Monatshefte für Mathematik und Physik*, welche die Originalität des HAUSDORFFSchen Werkes hervorhebt, ohne sehr ins Einzelne zu gehen, und eine von dem in der Mengenlehre bestens bewanderten GIULIO VIVANTI (1859–1949) im *Bollettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*. Diese Rezension wird HAUSDORFFS Leistung sehr viel besser gerecht als die oben genannten. VIVANTI zitiert z. B. HAUSDORFFS Umgebungsaxiome im Wortlaut und legt den Schwerpunkt seiner inhaltsreichen Besprechung auf die topologischen Kapitel der *Grundzüge*. Er schließt mit der Überzeugung, daß HAUSDORFFS Buch „ein wichtiger Schritt nach vorn sowohl im Hinblick auf Verallgemeinerung als auch hinsichtlich der Strenge ist.“

Gering war die Resonanz in Frankreich. 1916 erschien anonym eine neunzeilige Besprechung in *L'enseignement mathématique*, die immerhin bescheinigt, daß HAUSDORFFS Buch eine excellente Einführung in das Studium der Mengenlehre ist, und die ansonsten sinngemäß einige Passagen aus HAUSDORFFS eigener Einleitung wiederholt. Das *Bulletin des Sciences Mathématiques*, welches regelmäßig zahlreiche Bücher besprach, nahm weder von den *Grundzügen* noch von [H 1927a] und [H 1935a] Notiz.²²⁷ Selbst ein Forscher wie FRÉCHET, der an HAUSDORFFS Buch ein vitales Interesse haben mußte, hat es nach eigenem Zeugnis erst nach dem Ende des Krieges gelesen; er schrieb 1921:

²²⁴ Abdruck mit Kommentar: Band IV dieser Edition, S. 19–54.

²²⁵ S. diesen Band, S. 829.

²²⁶ Alle uns bekannt gewordenen Rezensionen sind in diesem Band, S. 827–855, abgedruckt.

²²⁷ Durchgesehen wurden die Bände bis 1940.

Ce n'est qu'après la guerre j'ai pu lire l'intéressant Livre de Hausdorff.²²⁸

Es ist vielleicht auch bezeichnend, daß die Besprechung der *Grundzüge* im *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* von keinem prominenten Mathematiker vorgenommen wurde, sondern vom Herausgeber des Jahrbuchs selbst, dem greisen EMIL LAMPE (1840–1918), der zwar ein persönlicher Freund CANTORS, aber kein Kenner der Mengenlehre war. LAMPE wiederholte im wesentlichen HAUSDORFFS eigenes Vorwort und nannte dann lediglich die Kapitelüberschriften der *Grundzüge*. 1920 erschien eine fast gleichlautende Besprechung LAMPES im *Archiv der Mathematik und Physik*; der Jahrbuchband für 1914/15 kam erst 1922 heraus.

Eine sehr gründliche und kompetente Rezension der *Grundzüge* erschien im Dezember 1920 im *Bulletin of the American Mathematical Society*. Ihr Autor HENRY BLUMBERG (1886–1950) hatte 1912 bei EDMUND LANDAU (1877–1938) in Göttingen promoviert und arbeitete hauptsächlich auf dem Gebiet der reellen Funktionen. Es ist auch heute noch ein Genuß, diese von tiefem Verständnis und Bewunderung für HAUSDORFFS Werk getragene Besprechung zu lesen.²²⁹

BLUMBERGS Rezension fällt in eine Zeit, in der sich eine junge, neue Generation von Forschern anschickte, die Anregungen aufzunehmen, die in HAUSDORFFS Buch in so reichem Maße enthalten waren, wobei ohne Zweifel die Topologie im Mittelpunkt des Interesses stand. Unter diesen Forschern sind besonders zu nennen STEFAN BANACH, KAROL BORSUK (1905–1982), WITOLD HUREWICZ (1904–1956), ZYGMUNT JANISZEWSKI, BRONISŁAW KNASTER (1893–1980), KAZIMIERZ KURATOWSKI (1896–1980), ANTONI ŁOMNICKI (1881–1941), STEFAN MAZURKIEWICZ, WACŁAW SIERPIŃSKI, HUGO STEINHAUS (1887–1972), ALFRED TARSKI (1901–1983) und STANISŁAW ULAM (1909–1984) in Polen, PAUL ALEXANDROFF, LEV TUMARKIN (1904–1974), ANDREJ TYCHONOFF (1906–1993) und PAUL URYSOHN in Rußland, HANS HAHN, KARL MENGER (1902–1985) und LEOPOLD VIETORIS (1891–2002) in Österreich, HEINRICH TIETZE (1880–1964) in Deutschland (viele dieser Forscher jeweils mit einer Reihe von Schülern). Auffallend stark sind Mathematiker aus Polen und Rußland vertreten, während die Rezeption der *Grundzüge* durch Mathematiker des eigenen Landes relativ bescheiden blieb. Besonders eng waren HAUSDORFFS Beziehungen zu den russischen Topologen. Es verwundert deshalb nicht, daß er 1929 in einem Brief an ALEXANDROFF schrieb: „Mein Stern geht tatsächlich im Osten, d. h. in Moskau auf.“ In einem dem Brief beigelegten offiziellen Dankschreiben HAUSDORFFS anlässlich seiner Ernennung zum Ehrenmitglied

²²⁸[Fré 1921], S.367. Es ist dies die zeitlich früheste Erwähnung der *Grundzüge* bei FRÉCHET. TAYLOR vermutet, daß FRÉCHET 1919 von dem amerikanischen Mathematiker T. H. HILDEBRANDT auf HAUSDORFFS Werk aufmerksam gemacht worden ist. HILDEBRANDT schrieb am 2. 2. 1919 an FRÉCHET (im Hinblick auf Räume, die durch Umgebungsaxiome definiert sind, nach Erwähnung von R. E. ROOT): „The treatment of this subject in the latter work [HAUSDORFFS *Grundzüge* – W. P.] is one of the best things I know along this line.“([Tay 1985], S. 284).

²²⁹Abgedruckt in diesem Band, S. 844–853.

des topologischen Vereins der Universität Moskau heißt es – an ALEXANDROFF gerichtet:

Es ist mir eine grosse Genugtuung, dass meine Bemühungen um exakte Grundbegriffe in der Punktmengenlehre in Ihrem Kreise so rückhaltlose Anerkennung gefunden haben, und ich verfolge mit freudiger Anteilnahme den gewaltigen und umfangreichen Aufbau der Topologie, den Sie und Ihre Schüler auf jenen Grundlagen errichtet haben und noch weiter auszugestalten im Begriff sind.²³⁰

Russische Mathematiker hatten auch einen beträchtlichen Anteil an der Rezeption der *Grundzüge* in Deutschland selbst: Von den 34 Arbeiten in den Bänden 83(1921) bis 106(1932) der *Mathematischen Annalen*, die HAUSDORFFS *Grundzüge* zitieren und die z. T. direkt daran anknüpfen, stammen 16 von russischen Autoren.

Eine besondere Rolle bei der Rezeption der HAUSDORFFSchen Ideen spielte die 1920 in Polen gegründete Zeitschrift *Fundamenta Mathematicae*. Bereits 1917 hatte Z. JANISZEWSKI in einer Denkschrift Vorschläge gemacht, wie in einem neu erstehenden Polen die Mathematik zu internationaler Bedeutung geführt werden könne. Er schlug darin vor, die Kräfte auf ein modernes aussichtsreiches Gebiet zu konzentrieren und ein spezielles Fachjournal zu gründen, welches ausschließlich diesem Spezialgebiet gewidmet sein sollte. Als 1919 schließlich JANISZEWSKI, SIERPIŃSKI und MAZURKIEWICZ als Professoren an der wiedererstandenen Warschauer Universität vereint waren, wurden diese Pläne in die Tat umgesetzt.²³¹ Man wählte als Gebiet die Mengenlehre und ihre Anwendungen und gründete mit *Fundamenta Mathematicae* eine der ersten mathematischen Spezialzeitschriften mit den Schwerpunkten Mengenlehre, Topologie, Theorie der reellen Funktionen, Maß- und Integrationstheorie, Funktionalanalysis, Logik und Grundlagen der Mathematik. Ein besonderes Gewicht hatte in diesem Spektrum die allgemeine Topologie. Von Band 1 (1920) an war die Zeitschrift, geführt von SIERPIŃSKI und MAZURKIEWICZ,²³² ein international geachtetes Blatt auf hohem Niveau.

HAUSDORFFS *Grundzüge* waren in *Fundamenta Mathematicae* vom ersten Bande an mit bemerkenswerter Häufigkeit präsent. Von den 558 Arbeiten (HAUSDORFFS eigene drei Arbeiten nicht gerechnet), die in den ersten 20 Bänden von 1 (1920) bis 20 (1933) erschienen sind, haben 88 die *Grundzüge* zitiert. Dabei muß man noch berücksichtigen, daß HAUSDORFFS Begriffsbildungen zunehmend Allgemeingut wurden, so daß sie auch in einer Reihe von Arbeiten verwendet werden, die HAUSDORFF nicht explizit nennen. Die häufigsten Zitationen beziehen sich auf die Übernahme HAUSDORFFScher Begriffe und Resultate aus dem topologischen Teil der *Grundzüge*. So fußt z. B. URYSOHNS *Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes* [U 1925/1926], eine Arbeit vom Umfang eines Buches,

²³⁰NL HAUSDORFF : Kapsel 62. Brief vom 4.1.1929 + Beilage.

²³¹S. dazu [Du 1996], [Kuz 1968] und [Kuz 1970].

²³²JANISZEWSKI war kurz vor Erscheinen des ersten Bandes der damals grassierenden Virusgrippe erlegen.

in der URYSOHN seine Dimensionstheorie entwickelt, völlig auf HAUSDORFFS *Grundzügen*; diese werden von URYSOHN nicht weniger als 60 mal angeführt.

Auch an andere Teile der *Grundzüge* knüpfen einige aus heutiger Sicht klassische Arbeiten unmittelbar an. So waren HAUSDORFFS paradoxe Kugelzerlegung und die damit gewonnene negative Lösung des endlich-additiven Maßproblems für \mathbb{R}^n mit $n \geq 3$ Quelle berühmter Arbeiten von BANACH, BANACH/TARSKI und VON NEUMANN.²³³ In [T 1925] wird HAUSDORFFS Rekursionsformel für die Alephexponentiation wesentlich verallgemeinert. Dabei spielt HAUSDORFFS Begriff der Konfinalität eine grundlegende Rolle.

3.2 Lehrbücher der allgemeinen Mengenlehre und der allgemeinen Topologie nach 1914

In den kommentierenden Essays und in den Anmerkungen zum Text der *Grundzüge* wird auf eine Reihe von Entwicklungen, die sich aus HAUSDORFFS Werk ergeben haben, im Detail eingegangen. Aus dem Nachlaß HAUSDORFFS geht hervor, daß er sich für einige in den zwanziger Jahren – nicht zuletzt durch seine Vorarbeit – rasch aufblühende Gebiete der allgemeinen Topologie besonders interessiert hat, wie z. B. die Metrisationssätze, die Dimensionstheorie, die Theorie der Kontinua (insbesondere die der Kurven) und die deskriptive Mengenlehre. Hierauf wird im Band III im Zusammenhang mit der Edition der weiteren topologischen Veröffentlichungen HAUSDORFFS und mit dem Abdruck einer Reihe von Stücken aus dem Nachlaß genauer eingegangen.²³⁴ Hier sollen lediglich einige Bemerkungen zur Lehrbuchsituation in der Mengenlehre und der allgemeinen Topologie nach 1914 und zum Verhältnis der jeweiligen Lehrbuchautoren zu HAUSDORFFS *Grundzügen* – soweit sich dies belegen läßt – folgen.

Das erste Lehrbuch der allgemeinen Mengenlehre nach 1914 war A. FRAENKELS *Einleitung in die Mengenlehre* ([Fr 1919]). Es war im Kriege entstanden und führte auf elementarem Niveau in die Mengenlehre ein. Im Vorwort heißt es:

Wer vom Standpunkt des Mathematikers aus das mengentheoretische Gebäude gründlich kennenlernen will, darf sich daher mit dem vorliegenden Büchlein nicht begnügen, sondern muß noch zu einer der am Schluß angeführten Schriften (am besten zu Herrn HAUSDORFFS „Grundzügen“) greifen.²³⁵

1923 erschien eine zweite Auflage von FRAENKELS Werk, bereits in Springers gelber Reihe. Gegenüber der ersten Auflage waren die Grundlagenfragen ausführlicher behandelt und insbesondere die ZERMELOSche Axiomatisierung mit

²³³[Ba 1923], [BaT 1924], [Neu 1929]. Die Folgeentwicklung von HAUSDORFFS Kugelparadoxon ist im Band IV dieser Edition, S. 11–18, eingehend diskutiert.

²³⁴Reichhaltiges historisches Material zur Entwicklung der allgemeinen Topologie findet man in [AuLo 1997/1998].

²³⁵[Fr 1919], S. IV. Die „angeführten Schriften“ sind neben den *Grundzügen* die Originalarbeiten CANTORS, die SCHOENFLIESSchen Berichte und [He 1906].

eigenen Ergänzungen FRAENKELS dargestellt. Das obige Zitat wird im Vorwort wiederholt. Die dritte Auflage von FRAENKELS *Einleitung in die Mengenlehre* erschien 1928, wiederum erweitert und aktualisiert. An Lehrbüchern für die „abstrakte Mengenlehre“ nennt FRAENKEL hier – „etwa in der Reihenfolge von den elementareren zu den tiefergehenden Darstellungen“– [Gr 1924], [He 1906], [N 1923], [Li 1926], [H 1914 a], [H 1927 a].²³⁶ Obwohl [Fr 1928] als ein vollwertiges Lehrbuch der allgemeinen Mengenlehre bezeichnet werden kann, schrieb FRAENKEL selbst:

Für eindringende Studien kommt allein das ausgezeichnete Lehrbuch von Hausdorff in Betracht.²³⁷

Ebenfalls 1928 erschien in der Sammlung Göschen ERICH KAMKES (1890–1961) *Mengenlehre*. Entsprechend dem Zweck der Sammlung sollte dieses Bändchen, welches die allgemeine Mengenlehre und einige Elemente der Punktmententheorie des \mathbb{R}^n enthielt, Studenten mit einem Basiswissen auf mengentheoretischem Gebiet ausrüsten. „Für weitergehende Studien auf dem Gesamtgebiet der Mengenlehre“ empfiehlt KAMKE HAUSDORFFS *Grundzüge* und HAUSDORFFS *Mengenlehre* (s. u.); „wem mehr an der Herausarbeitung des Grundsätzlichen liegt“, der solle zu FRAENKELS Büchern [Fr 1927], [Fr 1928] greifen. Das Büchlein hat seinen Zweck sehr gut erfüllt; es erlebte nach dem 2. Weltkrieg noch 6 weitere Auflagen.

In der „Collection Borel“ erschien 1928 W. SIERPIŃSKIS *Leçons sur les nombres transfinis*, wie bereits erwähnt, die Übersetzung von Band 1 seines *Zarys teoryi mnogości*. Das Vorwort schrieb BOREL; er betont dort, daß die Theorie der transfiniten Zahlen in seiner „Collection“ schon seit 1898 von ihm selbst, von BAIRE und von LEBESGUE behandelt worden sei, aber immer im Hinblick auf die Anwendungen in der Analysis. SIERPIŃSKI behandle sie hier erstmals als eine eigenständige Theorie, unabhängig von den Anwendungen. Ein zweiter wesentlicher Unterschied bestehe darin, daß SIERPIŃSKI an die Realität aller transfiniten Zahlen glaube und ZERMELOS Auswahlprinzip und seinen Beweis des Wohlordnungssatzes akzeptiere. In Bezug auf HAUSDORFF hinterläßt das Werk den merkwürdigen Eindruck, als sei dieser Autor mit seiner freien Auffassung vom Wesen der Mathematik in Frankreich und insbesondere in der „Collection Borel“ nicht so recht opportun gewesen. Obwohl in Fußnoten zahlreiche Literaturhinweise gegeben werden²³⁸, wird HAUSDORFF nicht einmal an der Stelle genannt, wo von regulären und singulären Anfangszahlen die Rede ist. Es gibt einen einzigen Hinweis auf die *Grundzüge*: Nachdem SIERPIŃSKI den Wohlordnungssatz in der Form „tout ensemble a la même puissance qu’un ensemble bien ordonné“ ausgesprochen hat, heißt es:

²³⁶[Gr 1924] ist eine ganz elementare Einführung von 49 Seiten, [N 1923] bringt in einigen Kapiteln auch die Theorie der transfiniten Zahlen, [Li 1926] ist trotz anderslautendem Titel im wesentlichen eine kurze Einführung in die Mengenlehre. Für den holländisch sprechenden Leser wird auch noch [HSchog 1926] erwähnt.

²³⁷[Fr 1928], S. 394.

²³⁸Eine Bibliographie hat das Buch nicht.

Plusieurs auteurs, suivant M. Zermelo, expriment ce théorème en disant que *tout ensemble peut être bien ordonné*.²³⁹

Hier schließt sich folgende Fußnote an:

Par exemple, F. Hausdorff, *Gründzüge* [sic!] *der Mengenlehre*, Leipzig 1914, p. 133.

Daß SIERPIŃSKI HAUSDORFF nicht geschätzt habe, kann gewiß nicht gesagt werden, denn er hat in *Fundamenta Mathematicae* in einer Reihe von Artikeln HAUSDORFF zitiert und in einigen Arbeiten unmittelbar an ihn angeschlossen.

Das Vorwort BORELS zu SIERPIŃSKIS *Leçons* läßt erkennen, daß er seine früheren Vorbehalte und Einschränkungen im Hinblick auf die Mengenlehre auch Ende der zwanziger Jahre noch voll aufrechterhielt. Erst die junge Generation französischer Mathematiker, die sich in der Gruppe BOURBAKI zusammenschloß, hat sich über diese Vorbehalte hinweggesetzt – für sie war HAUSDORFFS Werk ein wichtiger Bezugspunkt (s. u.).

HAUSDORFF selbst hatte Anfang 1927 ein Lehrbuch mit dem Titel *Mengenlehre* vorgelegt ([H 1927a]). Es war als zweite, neubearbeitete Auflage der *Grundzüge* deklariert, in Wirklichkeit aber ein neues Buch. Weggelassen waren große Teile der Theorie der geordneten Mengen, die Maß- und Integrationstheorie und die Abschnitte über euklidische Räume. „Mehr als diese Streichungen wird vielleicht bedauert werden“ – so HAUSDORFF im Vorwort –

daß ich zu weiterer Raumersparnis in der Punktmengenlehre den *topologischen* Standpunkt, durch den sich die erste Auflage anscheinend viele Freunde erworben hat, aufgegeben und mich auf die einfachere Theorie der *metrischen* Räume beschränkt habe, [...]²⁴⁰

Gewissermaßen als Ausgleich hat HAUSDORFF hier erstmalig den aktuellen Stand der deskriptiven Mengenlehre dargestellt bis hin zu neuesten Ergebnissen NICOLAI LUSINS (1883–1950), die sich zum Zeitpunkt der Niederschrift der *Mengenlehre* noch bei den *Fundamenta* im Druck befanden. So gesehen ist HAUSDORFFS Buch auch eine Monographie über ein mengentheoretisches Spezialgebiet und als solche fast ebenso gründlich rezipiert worden wie die *Grundzüge*.²⁴¹

Weitere spezielle Monographien stammten von FRAENKEL, LUSIN und SIERPIŃSKI. 1927 erschienen FRAENKELS *Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre* ([Fr 1927]). Dieses Werk war ausschließlich den Grundlagenfragen gewidmet, insbesondere dem axiomatischen Aufbau der Mengenlehre nach ZERMELO – FRAENKEL. Aber auch der intuitionistische Standpunkt wurde eingehend dargestellt. Beziehungen zu HAUSDORFF finden sich in diesem Buch nicht.

²³⁹[Si 1928a], S. 231.

²⁴⁰[H 1927a], S. 5/6. Das Buch wird im Band III dieser Edition abgedruckt. Dort wird auch auf die Reaktion verschiedener Mathematiker auf diesen Wechsel des Standpunktes eingegangen.

²⁴¹S. dazu die historische Einführung zu Band III dieser Edition.

1930 kamen in der „Collection Borel“ LUSINS *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications* ([Lus 1930]) heraus, eine Monographie über deskriptive Mengenlehre mit sehr ausführlichen philosophischen Reflexionen (etwa im Sinne BORELS). HAUSDORFFS *Grundzüge* werden in diesem Buch nicht zitiert, seine *Mengenlehre* gelegentlich, z. B. an der Stelle, wo LUSIN über Trennbarkeit durch Borelmengen handelt. Dort heißt es, wohl auch mit Rückblick auf die von den *Grundzügen* ausgehende Entwicklung:

C'est à l'éminent géomètre allemand qu'on doit le premier l'idée générale de séparation des ensembles si importante dans la Topologie.²⁴²

Philosophisch lagen HAUSDORFF und LUSIN denkbar weit auseinander. Zum Verhältnis beider Forscher und zu näheren Einzelheiten über LUSINS Werk muß erneut auf die historische Einleitung und die Kommentare im Band III dieser Edition verwiesen werden.

Einem sehr speziellen Fragenkreis war die Monographie *Hypothèse du continu* von SIERPIŃSKI gewidmet ([Si 1934a]). Ihm ging es insbesondere um Aussagen, die zur Kontinuumhypothese äquivalent sind (z. B. in der Theorie der reellen Funktionen, der Maßtheorie und anderen Gebieten). Das Werk beruhte hauptsächlich auf Forschungen von SIERPIŃSKI selbst und von LUSIN und KURATOWSKI. HAUSDORFF wird nur im Hinblick auf einige grundlegende Beiträge zitiert (η_α -Mengen, unerreichbare Kardinalzahlen, verallgemeinerte Kontinuumhypothese).

Die Topologie war nach Erscheinen von HAUSDORFFS *Grundzügen* noch lange in zwei fast disjunkte Zweige geteilt, in einen klassischen Zweig mit tiefen, weit zurückreichenden Wurzeln in verschiedenen Gebieten der Mathematik und mit einem Arsenal feinsinniger Methoden (Analysis Situs) und in einen – von HAUSDORFF erst zu einer Theorie ausgestalteten – mengentheoretischen oder allgemein-topologischen Zweig.²⁴³ Das erste eigenständige Buch über allgemeine Topologie nach HAUSDORFFS *Grundzügen* war M. FRÉCHETS *Espaces abstraits ...* ([Fré 1928]). FRÉCHET hatte bereits in seiner Dissertation [Fré 1906] mit den „classes (L)“ Räume eingeführt, die im allgemeinen keine topologischen Räume im HAUSDORFFSchen Sinne waren. In der Arbeit [Fré 1921] führte er die „classes (H)“²⁴⁴ ein, die er später „espaces accessibles“ nannte. Es sind dies die topologischen T_1 -Räume. FRÉCHET benutzte ab 1925 und dann auch in seinem Buch den Begriff „espace topologique“ als eine Art Oberbegriff für verschiedene Raumklassen und führte zur Unterscheidung für die T_2 -Räume den Begriff „espace de Hausdorff“ ein (erstmalig in [Fré 1925], dann in [Fré 1926] und schließlich auch in seinem Buch). Diese Bezeichnung hat sich rasch durchgesetzt.

FRÉCHETS Buch war allerdings überhaupt kein Erfolg. ANGUS TAYLOR schreibt in seiner detailreichen, die Verdienste und Schwächen FRÉCHETS sorgfältig abwägenden Studie folgendes über das FRÉCHETSche Buch:

²⁴²[Lus 1930], S. 156.

²⁴³S. dazu insbesondere Abschnitt 3.4.

²⁴⁴benannt nach dem amerikanischen Mathematiker E. R. HEDRICK.

FRÉCHET's decision to omit proofs and merely to describe a great assortment of ideas and results, with not much selective emphasis, made the book merely a compendium of definitions, facts, and relationships, with a guide to the periodical literature as the only help, if further help were needed. This deprived the book of the appeal of a well planned textbook which would instruct, inspire, and encourage young scholars.

FRÉCHET's book was too late on the scene to have any hope of displacing the influence of HAUSDORFF's book of 1914. Moreover, it was not constructed in a manner to capture the minds of young French mathematicians who might readily have preferred a French book to a German book on Topology.²⁴⁵

Das trifft in der Tat den Kern. So hat z. B. ANDRÉ WEIL (1906–1998), eines der Gründungsmitglieder der Gruppe BOURBAKI, ziemlich abfällige Bemerkungen über FRÉCHETS Buch gemacht.²⁴⁶ Von FRÉCHETS früheren Ideen jedoch haben zahlreiche Mathematiker Anregungen empfangen, insbesondere eine Reihe amerikanischer Topologen, aber auch ALEXANDROFF und URYSOHN und nicht zuletzt HAUSDORFF selbst. Treffend hat EDUARD ČECH (1893–1960) FRÉCHETS Rolle charakterisiert:

Fréchet's work in general topology is incentive and rich in new ideas, but it is mainly programmatical, and a complete and thorough study is seldom given.²⁴⁷

Es war SIERPIŃSKI, der FRÉCHETS H-Klassen sehr eingehend studierte – viel systematischer und gründlicher als FRÉCHET selbst – und sie in eine systematische Darstellung der allgemeinen Topologie integrierte, und zwar in seiner 1928 in Warschau erschienenen *Topologia ogólna*, dem Band 2 seines *Zarys teorii mnogości*. SIERPIŃSKI beginnt mit sehr allgemeinen Räumen, die lediglich die üblichen Axiome für offene Mengen erfüllen, geht dann zu den T_1 -Räumen (H-Klassen) über, studiert T_1 -Räume mit abzählbarer Basis, Hausdorff-Räume mit abzählbarer Basis, schließlich normale Räume und dann metrische Räume. Diese unvollständige Aufzählung zeigt bereits die Grundidee von SIERPIŃSKIS Darstellung: eine Hierarchie von Räumen, bei sehr allgemeinen beginnend und zu immer spezielleren fortschreitend, wird auf ihre jeweiligen Eigenschaften hin untersucht. Im Vorwort hat er dieses Vorgehen besonders hervorgehoben:

Der Inhalt dieses Buches ist so angeordnet, daß die jeweiligen Theoreme in denjenigen Kapiteln bewiesen werden, in denen die für den Beweis notwendigen Axiome eingeführt worden sind. Die Theoreme eines gegebenen Kapitels sind i. a. nicht richtig für Räume, welche lediglich den Axiomen des vorhergehenden Kapitels genügen; [...]²⁴⁸

Am Ende der Hierarchie stehen vollständige metrische Räume. Der Darstellung der deskriptiven Mengenlehre in diesen Räumen widmet SIERPIŃSKI etwa

²⁴⁵[Tay 1985], S. 361.

²⁴⁶[We 1937], S. 37.

²⁴⁷[Če 1937], S. 470–471.

²⁴⁸[Si 1928b], Vorwort.

die Hälfte des Buches. HAUSDORFFS *Grundzüge* werden in den ersten Kapiteln mehrmals zitiert (Theorie des Zusammenhangs, topologische Räume, HAUSDORFFS Trennungsaxiom, Abzählbarkeitsaxiome, metrische Räume, F_σ - und G_δ -Mengen), seine Beiträge zur deskriptiven Mengenlehre finden im letzten Kapitel Erwähnung (BORELSche Hierarchie, Mächtigkeit der Borelmengen, reduzible Mengen).

Die Wirkung der *Topologia ogólna* blieb auf Polen beschränkt; breiter bekannt wurde das Buch erst, nachdem es 1934 in Kanada in englischer Übersetzung erschienen war ([Si 1934b]). Das Werk erlebte nach dem zweiten Weltkrieg noch weitere Auflagen; in diesen führt SIERPIŃSKI für HAUSDORFFS Bücher [H 1914a] und [H 1927a] – des öfteren Zitierens wegen – eigene Kürzel ein.

1933 kam als dritter Band der Serie „Monografie Matematyczne“ nach den Klassikern [Ba 1932] und [S 1933] ein weiteres klassisches Werk heraus, C. KURATOWSKIS *Topologie I*. Im Vorwort nennt KURATOWSKI an Büchern, von denen er bei der Abfassung seines Werkes profitiert hat, an erster Stelle die *Grundzüge* und die *Mengenlehre* von HAUSDORFF, dann SIERPIŃSKIS *Topologia ogólna* und schließlich FRÉCHETS *Les espaces abstraits*. Nach SIERPIŃSKI, KURATOWSKIS Lehrer, ist HAUSDORFF der im Text mit Abstand am meisten zitierte Autor.²⁴⁹ KURATOWSKIS *Topologie I* war ohne Zweifel das einflußreichste Buch der „zweiten Generation“ über allgemeine Topologie. So wird beispielsweise in *Fundamenta Mathematicae* nach 1933 bei Referenzen, die die allgemeine Topologie betreffen, zunehmend auf KURATOWSKIS Buch verwiesen. RYSZARD ENGELKING nennt KURATOWSKIS *Topologie I* in einem Artikel über das mathematische Werk von KURATOWSKI „a masterpiece of mathematical literature.“²⁵⁰

Im Kapitel I „Notions fondamentales, calcul topologique“ entwickelt KURATOWSKI, ausgehend von seinen Hüllenaxiomen, die allgemeine Theorie der T_1 -Räume, wobei die topologischen Eigenschaften als absolute, als relative und als Eigenschaften im Kleinen studiert werden. Das Kapitel II „Espaces métrisables et séparables“ behandelt zunächst weitere Raumtypen (z. B. spezielle L-Räume, Hausdorffräume, metrische Räume), um dann die metrisierbaren separablen Räume in den Mittelpunkt zu stellen und für ihre Punktmengen und Funktionen eine reichhaltige Theorie zu entwickeln, einschließlich der Elemente der Dimensionstheorie. Im Kapitel III „Espaces complets“ stehen die Eigenschaften vollständiger Räume im Vordergrund (CANTORScher Durchschnittssatz, BAIRES Charakterisierung der Mengen 1. Kategorie) sowie Fortsetzungssätze für stetige Abbildungen (TIETZE, HAUSDORFF). Ferner werden die deskriptive Mengenlehre behandelt und hier vor allem die Abbildungseigenschaften verschiedener Mengenklassen, wodurch die Beziehungen der deskriptiven

²⁴⁹Für KURATOWSKI war HAUSDORFF zeitlebens ein wichtiger Autor. Als 1969 G. BERGMANN eine Reihe von Faszikeln aus HAUSDORFFS Nachlaß im Faksimiledruck publizierte ([H 1969]), hat KURATOWSKI, damals schon 73 Jahre alt, diese – von der äußeren Form her gewiss nicht leicht lesbaren – Manuskripte studiert und in einer eigenen Arbeit direkt darauf Bezug genommen (KURATOWSKI, C.: *On set-valued B-measurable mappings and a theorem of Hausdorff*. In: [AsFlRin 1972], S. 355–362).

²⁵⁰[En 1998], S. 449.

Mengenlehre zur Topologie besonders deutlich werden.

Die Wirkung von KURATOWSKIs *Topologie* beruhte zu einem nicht geringen Teil darauf, daß er die vielfältigen Beziehungen der allgemeinen Topologie zur Maßtheorie, zur Theorie der reellen Funktionen, zur deskriptiven Mengenlehre und zur Funktionalanalysis aufzeigte und so das Interesse für allgemeine Topologie in weiteren Kreisen von Mathematikern weckte.

Speziellen Teilen der allgemeinen Topologie waren die Monographien *Dimensionstheorie* [Men 1928] und *Kurventheorie* [Men 1932] von K. MENGER gewidmet. Diese Gebiete wurden zu großen Teilen erst nach Erscheinen der *Grundzüge* entwickelt; Hinweise auf die *Grundzüge* gibt es deshalb in diesen Werken nur gelegentlich. Aber auch für MENGER waren die *Grundzüge* „das Standardwerk der Punktmengenlehre“. In der *Kurventheorie* heißt es, nachdem MENGER bemerkt hat, daß die alten Kurvenbegriffe, welche man vor der Entwicklung der topologischen Dimensionstheorie hatte, nicht befriedigen konnten:

Das Standardwerk der Punktmengenlehre aus dem Jahre 1914 enthält denn auch überhaupt keine Definition des Begriffes Kurve. Denn, so heißt es dort, „die Mengen, die herkömmlicherweise diesen Namen führen, sind so heterogen, daß sie unter keinen vernünftigen Sammelbegriff fallen.“ (HAUSDORFF, *Grundzüge der Mengenlehre*, 1914, S. 369).²⁵¹

HAUSDORFF hat sich sowohl für die Dimensionstheorie als auch für die Kurventheorie lebhaft interessiert, wie aus zahlreichen Faszikeln in seinem Nachlaß hervorgeht. Mit MENGERS Darstellung war er nicht recht zufrieden; zu beiden Büchern gibt es im Nachlaß je ein umfangreiches Manuskript, in denen Formulierungen präzisiert und zahlreiche Beweise verbessert, einige sogar ganz neu gefaßt werden.²⁵²

Ab den zwanziger Jahren erschienen auch erste Lehrbücher und Monographien über Gegenstände der klassischen Analysis Situs ([V 1922], [Ke 1923], [Le 1924], [Le 1930], [Re 1932a], [Re 1932b], [Moo 1932], [SeThr 1934]). Alle diese Werke benötigen die allgemeine Theorie der topologischen Räume kaum oder gar nicht und enthalten deshalb keine Darstellung dieses Teils der Topologie; allenfalls wird kurz darauf hingewiesen. So schreibt z. B. SOLOMON LEFSCHETZ (1884 – 1972) in seinem Buch *Topology* ([Le 1930]):

Topology or Analysis Situs is usually defined as the study of properties of spaces or their configurations invariant under continuous transformations. But what are *spaces* and their *continuous* transformations?²⁵³

LEFSCHETZ betrachtet zunächst sehr allgemeine Umgebungsräume, um dann einschränkend festzustellen:

From the very general type of space considered so far we proceed to what might be termed „working spaces“ by imposing restrictive axioms

²⁵¹[Men 1932], S. 78.

²⁵²Näheres dazu im Band III dieser Edition.

²⁵³[Le 1930], S. 1.

upon the neighborhoods. The set in widest use today goes back to Hausdorff [1] [*Grundzüge* – W. P.] and characterizes what we shall call a *Hausdorff space*.²⁵⁴

Aus der allgemeinen Topologie werden auf wenigen Seiten metrische Räume und Metrisationssätze behandelt; danach geht LEFSCHETZ zu seinem eigentlichen Thema über, der Topologie der Polyeder und Mannigfaltigkeiten mit Anwendungen auf analytische Mannigfaltigkeiten und algebraische Geometrie.

Das erste Buch, welches eine gewisse Synthese der allgemeinen Topologie mit anderen Zweigen der Topologie anstrebte, war die *Topologie* von ALEXANDROFF/HOPF ([AH 1935]). Teil 1 dieses Werkes unter dem Titel „Grundbegriffe der mengentheoretischen Topologie“ behandelt nach einer kurzen Einführung in die allgemeine Theorie der topologischen Räume (wobei die KURATOWSKISCHEN Hüllenaxiome zugrundegelegt werden) vor allem Räume, die durch verschiedene Trennungseigenschaften charakterisiert sind, sowie kompakte Räume. ALEXANDROFF hatte bereits in den zwanziger Jahren daran gearbeitet, die neu entstandene allgemeine Topologie mit den klassischen Zweigen der Topologie zu verbinden. In einem Brief ALEXANDROFFS an HAUSDORFF vom 4. 7. 1926 heißt es:

[. . .] selbst arbeite ich an verschiedenen, im allgemeinen recht schwierigen Fragen [. . .] die sich alle darauf beziehen, um die bis jetzt bestehende tiefe Schlucht zwischen der allgemeinen (mengentheoretischen) und der klassischen Topologie auszufüllen, [. . .]²⁵⁵

ALEXANDROFF war für solcherart Bemühungen besonders offen: Er hatte HAUSDORFF gründlich rezipiert²⁵⁶, war einige Zeit bei BROUWER in Blaricum gewesen und weilte mit HEINZ HOPF (1894 – 1971) zusammen im Winter 1927/28 bei ALEXANDER, LEFSCHETZ und VEBLEN in Princeton.

Im Vorwort danken die Autoren u. a. auch HAUSDORFF für wertvolle Ratschläge.²⁵⁷ ALEXANDROFF und HOPF betonen, daß ihr Vorhaben, die Topologie als Ganzes darzustellen, besonders dadurch erschwert wurde,

[. . .], daß die Entwicklung der Topologie in zwei voneinander gänzlich getrennten Richtungen vor sich gegangen ist: in der algebraisch-kombinatorischen und in der mengentheoretischen [. . .]²⁵⁸

Weiter schreiben sie dann im Vorwort:

Als Marksteine in der Entwicklung der mengentheoretischen Topologie dürfen der Bericht über Punktmengen von SCHOENFLIES (1908)

²⁵⁴Ebd., S. 4.

²⁵⁵NL HAUSDORFF : Kapsel 61.

²⁵⁶In einem Brief vom 13. 5. 1926 schreibt er an HAUSDORFF: „Übrigens merke ich bei meiner jetzigen Vorlesung in Göttingen, daß ich Ihre erste Auflage [gemeint sind die *Grundzüge* – W. P.] bereits auswendig zitiere (so dirigieren gute Dirigenten z. B. die Beethovenschen Symphonien auch ohne Partitur!“ (NL HAUSDORFF : Kapsel 61).

²⁵⁷HAUSDORFF hatte auch von mindestens der Hälfte des Buches die Korrekturen mitgelesen, wie aus seinem Briefwechsel mit ALEXANDROFF hervorgeht.

²⁵⁸[AH 1935], S. VII.

und das klassische Buch von HAUSDORFF („Grundzüge der Mengenlehre“, 1914) gelten.²⁵⁹

An weiteren Büchern nennen ALEXANDROFF und HOPF für die mengentheoretische Topologie [Fré 1928], [Men 1928], [Men 1932] und [Ku 1933], für die klassische Topologie neben dem Enzyklopädieartikel von DEHN und HEEGARD [V 1922], [Le 1930] und [SeThr 1934].

Aber keines unter den genannten Büchern behandelt die *Topologie als ein Ganzes*; vielmehr wird in jedem Buch konsequent nur ein Zweig dieser Wissenschaft dargestellt.²⁶⁰

Das Buch von ALEXANDROFF und HOPF hatte einen großen Einfluß, wenn auch die Überwindung der „tiefen Schlucht“, von der ALEXANDROFF gesprochen hatte, damit noch lange nicht erledigt war.²⁶¹

3.3 Hausdorff und Bourbaki

In ihren *Éléments d'histoire des mathématiques* ([Bou 1960]) heben die Mathematiker des BOUBAKI-Kreises HAUSDORFFS *Grundzüge* als Beginn der allgemeinen Topologie, „wie wir sie heute verstehen“, hervor. Es heißt dort:

Avec Hausdorff ([113a], chap. 7-8-9) [[113a] verweist auf die *Grundzüge* – W. P.] commence la topologie générale telle qu'on l'entend aujourd'hui. [...] Le chapitre où il en développe les conséquences [aus den Umgebungsaxiomen – W. P.] est resté un modèle de théorie axiomatique, abstraite mais d'avance adaptée aux applications. Ce fut là, tout naturellement, le point de départ des recherches ultérieures sur la topologie générale, et principalement des travaux de l'école de Moscou, [...] ²⁶²

Bemerkenswert ist, daß die BOUBAKIS als Landsleute von FRÉCHET die Rolle HAUSDORFFS bei der Ausarbeitung der Theorie der metrischen Räume besonders hervorheben²⁶³:

Comme nous l'avons dit [...], la notion d'espace métrique fut introduite en 1906 par M. Fréchet, et développée quelques années plus tard par F. Hausdorff dans sa „Mengenlehre.“²⁶⁴

und an anderer Stelle:

Hausdorff, qui, dans sa „Mengenlehre“ [113a et b] [[113b meint die *Mengenlehre* von 1927 – W. P.] développa beaucoup la théorie des espaces métriques, reconnu en particulier qu'on peut appliquer à ces espaces la construction de Cantor [...] (gemeint ist die Vervollständigung nach Cantor) – W. P.]²⁶⁵

²⁵⁹Ebd.

²⁶⁰[AH 1935], S. VIII.

²⁶¹Einige Aspekte der komplizierten Wechselbeziehungen zwischen den verschiedenen Zweigen der Topologie werden im Abschnitt 3.4 behandelt.

²⁶²[Bou 1960], S. 151.

²⁶³FRÉCHET war sehr unzufrieden mit den Formulierungen über topologische und metrische Räume in [Bou 1960]; s. dazu [Tay 1982], S. 235–236 und [Tay 1985], S. 303.

²⁶⁴[Bou 1960], S. 176.

²⁶⁵Ebd., S. 153.

Die große Rolle, die gerade auch die *Grundzüge* für die Entwicklung und Akzeptanz der Theorie der metrischen Räume spielten, hat neben BOURBAKI auch HANS FREUDENTHAL (1905–1990) in einem (unpublizierten) Vortrag über HAUSDORFF, den er 1970 in Münster hielt, betont. FREUDENTHAL schrieb:

Man kann nicht sagen, daß Fréchet's Begriffe [gemeint sind die der Dissertation von 1906 – W. P.] bis zu Hausdorff's Buch viel Anklang fanden. Der erste, der sie in ihren Konsequenzen wirklich von neuem durchdachte und derjenige, der sie, sei es unter neuen Namen, popularisierte, war Hausdorff.²⁶⁶

Das Wirken BOURBAKI hat aus heutiger Sicht ganz wesentlich dazu beigetragen, die Mathematik mengentheoretisch-axiomatisch aufzubauen, ganz nach dem Muster, wie es HAUSDORFF in den *Grundzügen* für die Topologie geliefert hatte.²⁶⁷ Es erhebt sich nun die Frage, inwieweit BOURBAKI von HAUSDORFF beeinflusst wurde.

Die Aktivitäten der Gruppe BOURBAKI begannen 1934 mit dem Ziel, moderne französische Lehrbücher zu schaffen und so den Rückstand, in den Frankreich nach Meinung der Beteiligten gegenüber der modernen Entwicklung geraten war, rasch aufzuholen. Bereits in dieser Frühphase scheinen HAUSDORFF'S *Grundzüge* wesentlich dazu beigetragen zu haben, diesen Rückstand erst einmal zu konstatieren. So berichtete LÊ DŨNG TRÁNG über Gespräche mit CLAUDE CHEVALLEY (1909–1984), in denen dieser geäußert habe, erst beim Lesen des Buches von HAUSDORFF sei ihm klar geworden, wie weit die Entwicklung in Frankreich hinter der in Deutschland zurückgeblieben war.²⁶⁸ In einem Brief vom 13. 6. 1996 an E. BRIESKORN schreibt LÊ DŨNG TRÁNG:

Il me dit que le premier livre qu'il avait lu ainsi [gemeint ist das erste Buch in deutscher Sprache, welches er mittels eines Wörterbuchs las – W. P.] était celui de Hausdorff, Mengenlehre, et que cela l'avait beaucoup influencé.

Weiter heißt es in diesem Brief:

A vrai dire je pense aussi que, par l'intermédiaire de Chevalley, le groupe Bourbaki a certainement été influencé par Hausdorff. De toute façon il est de notoriété publique que Bourbaki a été fondé par de jeunes mathématiciens impressionnés par l'Ecole Allemande de Mathématiques du début du siècle.

CHEVALLEY war zu Beginn der Arbeit Vorsitzender einer bibliographischen Unterkommission, welche für die erste Vollversammlung eine Liste wichtiger Literatur vorschlagen sollte. Für die Algebra nennt diese Liste VAN DER WAERDEN

²⁶⁶H. FREUDENTHAL: *Felix Hausdorff's wissenschaftliche Bedeutung*. Manuskript, Bl. 6. Archiv H. FREUDENTHAL, Inv.-Nr. 1504.

²⁶⁷S. dazu insbesondere den programmatischen Artikel *L'architecture de mathématique* ([Bou 1948]).

²⁶⁸Mündl. Mitteilung an E. BRIESKORN.

und HAUSDORFF.²⁶⁹ HAUSDORFF erscheint hier unter Algebra, weil es die ursprüngliche Absicht war, die Mengenlehre als kurzes Präliminarium der Algebra abzuhandeln (Algebra hier schon als die moderne Algebra der NOETHER-Schule verstanden). Gerade die Entwürfe zur Mengenlehre für die erste Vollversammlung im Juli 1935 zeigen, wie weit die BOURBAKI-Gruppe am Beginn ihrer Tätigkeit noch auf ganz klassischen Positionen stand und die Mengenlehre auf die allereinfachsten Anfänge beschränken wollte.²⁷⁰ So sollten im wesentlichen nur abzählbare Mengen behandelt werden; von transfiniten Zahlen und transfiniten Induktion sollte überhaupt nicht die Rede sein. Zu einer Diskussion, ob man transfiniten Zahlen aufnehmen solle oder nicht, heißt es im intern zirkulierenden *Journal de Bourbaki*, No. 3 (1936):

Une chose est à noter, qui semble bien décidée, on abandonne les alephs et les ordinaux transfinis à leur triste sort; qu'ils dorment en paix et que personne ne s'en serve jamais.²⁷¹

Die vor allem auf unveröffentlichten Quellen beruhende Arbeit [Be 1989] von LILIANE BEAULIEU zeigt eindrucksvoll, wie wenig die Mitglieder der Gruppe BOURBAKI am Beginn ihrer gemeinsamen Arbeit (1934/Anfang 35) davon ahnten, welche fundamentale Rolle Mengenlehre, geordnete Strukturen, algebraische und topologische Strukturen später in ihrem Aufbau der Mathematik spielen würden (und in Deutschland im Grunde schon spielten). Es ist auch bemerkenswert, wie wenig sie am Anfang die Topologie beachtetten, wobei sie in der mengentheoretischen Topologie noch ganz auf dem veralteten Standpunkt von CANTOR standen.

Im Laufe ihrer Arbeit, die durch zahlreiche, z. T. sehr kontroverse und heftige Diskussionen und durch eine Fülle immer neuer Manuskriptentwürfe gekennzeichnet war, wird nach und nach die moderne Entwicklung (HAUSDORFF, NOETHER, ARTIN, VAN DER WAERDEN, ALEXANDROFF/HOPF) vollständig aufgenommen und auf dieser Basis das eigene Konzept entwickelt, verbunden mit bedeutenden eigenen Beiträgen. Schon 1936 stellt man in Bezug auf die Mengenlehre fest, daß sie nicht bloß ein Einführungskapitel in die Algebra, sondern „la base de toute théorie mathématique“ ist.²⁷² Ab Mitte 1935, insbesondere nach der Moskauer Topologie-Konferenz, bildete die Topologie für Jahre einen Schwerpunkt der Arbeit, und zwar zunächst vor allem die allgemeine Topologie. Eine besondere Rolle spielte hier das Werk von ALEXANDROFF und HOPF. Wenn man berücksichtigt, wie stark ALEXANDROFF und die Moskauer Schule auf HAUSDORFF fußten, so muß man, was die allgemeine Topologie betrifft, einen bedeutenden indirekten Einfluß HAUSDORFFS auf die Arbeit von BOURBAKI konstatieren.

Das Ergebnis der jahrelangen Bemühungen um die allgemeine Topologie war schließlich die *Topologie générale*, die zwischen 1940 und 1948 in neun Kapi-

²⁶⁹[Be 1989], S. 219.

²⁷⁰[Be 1989], S. 235–247.

²⁷¹Zitiert nach [Be 1989], S. 325.

²⁷²Transfiniten Zahlen werden allerdings erst nach 1950 in die Bände der *Théorie des ensembles* aufgenommen.

teln erschien. Die bedeutendsten originellen Beiträge von Mathematikern der BOURBAKI-Gruppe zur Topologie aus diesen Jahren sind WEILS Theorie der uniformen Räume und CARTANS Theorie der Filter. Bedeutendes leisteten Mitglieder der Gruppe auch für die Verbindung von Funktionalanalysis und Topologie (Topologie der schwachen Konvergenz, lokalkonvexe Räume).

3.4 Zur Aufnahme mengentheoretisch-topologischer Methoden in die Analysis Situs und geometrische Topologie²⁷³

Die auf CANTOR zurückgehende mengentheoretisch ausgerichtete Topologie und die von GAUSS, LISTING, RIEMANN und BETTI eröffnete Tradition der Analysis Situs bildeten zu Beginn des 20. Jahrhunderts zwei Forschungsstraditionen mit wenig Berührungspunkten zueinander; sie traten nur langsam und in mehreren Schüben in engere Beziehung zueinander.²⁷⁴ Es bedurfte daher einer langen Entwicklung, bis die HAUSDORFFSche mengentheoretische Auffassung der Topologie auch in das Studium der geometrischen Topologie der Mannigfaltigkeiten und Zellenkomplexe aufgenommen und dort wirksam wurde. Hier können und sollen nur einige Charakteristika dieser komplexen Entwicklung aufgelistet werden; diese sind als vorläufig anzusehen, solange eine tiefer erforschte Geschichte der Topologie im 20. Jahrhundert noch nicht geschrieben ist.²⁷⁵ Den Terminus “geometrische Topologie” verwenden wir hier in seiner weiteren Bedeutung, fassen darunter also das gesamte Feld des Studiums der Stetigkeits-, Differential- und/oder stückweise stetigen (PL) Topologie von Mannigfaltigkeiten und Zellenkomplexen.²⁷⁶

Grundsätzlich ist dabei im Auge zu behalten, daß der SCHOENFLIESSche Ansatz des Punktmengenstudiums der Analysis Situs des ausgehenden 19. und beginnenden 20. Jahrhunderts näher stand als die HAUSDORFFSche Theorie. Die SCHOENFLIESSchen Fragestellungen und Methoden gingen daher nicht in der allgemeinen (mengentheoretischen) Theorie der topologischen Räume auf. Ab Mitte des 20. Jahrhunderts lebte dieser Ansatz in den Arbeiten R. H. BINGS überraschend wieder auf und spielte nicht zuletzt durch die (nach den Aspekten stückweise linear bzw. C^0 -topologisch) ausdifferenzierten Ergebnisse über SCHOENFLIES-Sätze in höheren Dimensionen in der Theorie der Mannigfal-

²⁷³Von E. BRIESKORN und E. SCHOLZ. Wir danken M. KRECK für Diskussionen und Verbesserungsvorschläge.

²⁷⁴Die hier gewählte Verwendung der Bezeichnungen (mengentheoretisch ausgerichtete) “Topologie” und “Analysis Situs” ist unsere Beschreibungssprache; sie soll nicht eine entsprechende Unterscheidung in der Wortverwendung der Autoren des 19. oder frühen 20. Jahrhunderts suggerieren. Ganz im Gegenteil verwendete ja LISTING den Terminus “Topologie” im geometrischen Kontext, umgekehrt etwa A. HURWITZ die Bezeichnung “Analysis Situs” 1897 im CANTORSchen. Vgl. dazu HAUSDORFFS Anmerkung zu seiner Übertragung des Attributes “topologisch” auf allgemeinere Räume anlässlich der Einführung seiner Axiome (*Grundzüge* p. 213, Anm. 1).

²⁷⁵In einigen der Beiträge von [AuLo 1997, 1998, 2001] und [J 1999] werden wertvolle Bausteine dazu bereit gestellt. Zu der hier behandelten Fragestellung vgl. insbesondere [J 2001].

²⁷⁶An Stelle der in der aktuellen mathematischen Literatur auch häufig eingesetzten engeren Verwendung des Terminus “geometrische Topologie” sprechen wir hier entsprechend von (“reiner”) Stetigkeits- (bzw. C^0 -) Topologie der Mannigfaltigkeiten und Zellenkomplexe.

tigkeiten des letzten Drittels des Jahrhunderts eine wichtige Rolle. Weiterleben und Neuaufnahme des SCHOENFLIES-Ansatzes wurden dabei insbesondere durch die Arbeiten R. L. MOORES und seiner Schüler vermittelt.²⁷⁷ Eine besondere Rolle spielte dabei die von MOORE für die Dimension 2 begonnene Theorie der Zerlegungsräume, die von R. H. BING wesentlich weiterentwickelt wurde. Sie wurde von R. D. EDWARDS fortgeführt und bekam in M. FREEDMANS Klassifikation der 4-dimensionalen topologischen Mannigfaltigkeiten eine wichtige Funktion.²⁷⁸ Ferner gingen in diese Entwicklung die wilden Einbettungen der 2-Sphäre S^2 in die S^3 ein, die von J. W. ALEXANDER und von E. ARTIN und R. FOX 1948 als Gegenbeispiele zu einer direkten Übertragung des SCHOENFLIES-Satzes auf höhere Dimensionen konstruiert wurden, wie auch gewisse "wilde" Einbettungen von Cantormengen und Kontinua wie ANTOINES necklace von 1920 und das Whitehead-Continuum von 1935.²⁷⁹

In den ersten zwei bis drei Jahrzehnten nach Erscheinen der HAUSDORFFSchen *Grundzüge* wurde die Analysis Situs vom Ausbau der auf POINCARÉ zurückgehenden kombinatorisch-geometrischen Methoden und dem ab Mitte der 1920er Jahre erfolgenden Übergang zur algebraischen Topologie dominiert. HAUSDORFF selbst sah dieses Arbeitsgebiet bis in die Mitte der 1920er Jahre als ihm aus verschiedenen Gründen fern liegend an. Er begann sich erst tiefer damit zu beschäftigen, als die Algebraisierung der Methoden einsetzte.²⁸⁰ Allein schon aus diesem Grund blieb es Mathematikern der nächsten Generation, mit denen HAUSDORFF direkt (ALEXANDROFF) oder indirekt (polnische Schule, HOPF) in Kontakt stand, vorbehalten, die mengentheoretische Topologie als Sprache und Methode für eine begriffliche Fundierung der "Stetigkeitstopologie" auch in das Kerngebiet der zeitgenössischen Analysis Situs einzuführen. So hielt etwa P. ALEXANDROFF während seines Aufenthaltes in Princeton im Winter 1930/31 eine Vorlesung über "Topology" zu einer Zeit, in der dort noch das Paradigma und die Sprache der "Analysis Situs" vorherrschten, und trug damit zur Aufnahme der neueren Auffassungen der Topologie in Princeton bei. Der Übergang erfolgte im folgenden Jahrzehnt, gestützt von weiteren Gastvorlesungen, wie der von E. ČECH im Winter 1935/36 und von Vertretern der polnischen Schule (etwa KURATOWSKI im Frühjahr 1936). Sie drückt sich in einem tiefgreifenden Wandel in Stil und Inhalt der beiden Lehrbücher [Le 1930] und [Le 1942] aus.²⁸¹

In ausdrücklicher Gegnerschaft zur Fundierung der Topologie durch mengentheoretische Methoden standen die Programmatiken für eine strikt konstruktive oder eine intuitionistisch ausgerichtete Fundierung des "Kontinuumsbegriffs"

²⁷⁷Siehe [Wi 1949], 13, Anm. 11, [Wi 1982]. Weitere Informationen zur MOORE-Schule und zu BING in den Beiträgen von FIZPATRICK, JONES und STARBID in [AuLo 1997, 1998].

²⁷⁸[Ed 1978], [Free 1982].

²⁷⁹[An 1920], [Al 1924], [Whi 1935], [ArFo 1948].

²⁸⁰Siehe dazu Band III dieser Edition.

²⁸¹Siehe [En 1998] und N. STEENRODS Briefe an WILDER aus den Jahren 1934 bis 1937, dokumentiert in [J 2001], 822–828 und das Interview mit ROBERT WALKER vom 12. Juli 1984 ([TuAs 1984], Transcript 42). STEENROD organisierte weiter in den Jahren 1936/37 in Princeton ein Topologie-Seminar im Stile MOORES und WILDERS.

und der Topologie, wie sie von H. WEYL und dem späteren L. E. J. BROUWER sowie – auf etwas anderem philosophischen Hintergrund und in etwas anderer Ausrichtung – von K. REIDEMEISTER vertreten wurde. Insbesondere im deutschsprachigen Raum wurde die “Stetigkeitstopologie” auch in der breiteren mathematischen Diskussion während der 1920er Jahre als Gegensatz zu “rein” kombinatorischen oder “gemischten” Methoden angesehen. Dies wirkte einer raschen Übernahme der mengentheoretischen Topologie als breit akzeptierter begrifflicher Fundierung der Analysis Situs entgegen.²⁸² Die Monographien von ALEXANDROFF/HOPF (1935) und im englischsprachigen Raum die von LEFSCHETZ (1930, 1942) brachten die Hinwendung zu eben dieser Fundierung am stärksten zum Ausdruck und verliehen ihr bleibende Wirkung. Hinzu trat die Bearbeitung von Forschungsthemen, in denen die alte Trennung zwischen der Analysis Situs von Mannigfaltigkeiten sowie Zellenkomplexen einerseits und dem Studium der Topologie allgemeinerer Räume andererseits zumindest exemplarisch aufgehoben wurde. Bei LEFSCHETZ war ein Schlüsselthema für die Herstellung einer solchen Verbindung nach Einschätzung N. STEENRODS die schrittweise Verallgemeinerung seines Fixpunktsatzes,²⁸³ bei ALEXANDROFF sein Studium der “Spektren”.

In der Dekade zwischen Mitte der 1930er und der 1940er Jahre setzte sich auch in den topologischen Arbeitsfeldern strukturelles Denken international durch und verschaffte damit der allgemeinen Topologie mit ihren mengentheoretischen Begriffsbildungen über einzelne Personen oder Forschergruppen (“Schulen”) hinausgehende, breitere Akzeptanz und Verwendung. Während in den späteren 1930er Jahren für ALEXANDROFF und ab 1939 auch für KURATOWSKI Reisen nach Westeuropa oder in die USA unmöglich wurden, führte die Emigration junger polnischer Mathematiker, insbesondere von W. HUREWICZ (zunächst über Wien nach Amsterdam, ab 1936 in den USA) und des BORSUK-Schülers S. EILENBERG in die USA (1939 zunächst Princeton, dann Ann Arbor im Umfeld R. WILDERS) zu einer Vertiefung des Einflusses der mengentheoretisch ausgerichteten modernen Mathematik, wie sie in den 1920er Jahren in Polen und Moskau aufgeblüht war. Dort “im Osten” war ja auch HAUSDORFFS Stern zuerst aufgegangen, wie er in seinem Brief an ALEXANDROFF vom 4.1.1929 formuliert hatte (siehe S. 58). W. HUREWICZ hatte kurz vor seiner Emigration in die USA in einem Vortrag auf der internationalen Topologie-Konferenz in Moskau 1935 und damit verbundenen Publikationen der Jahre 1935 und 1936 die Topologie auf Abbildungsräumen von Mannigfaltigkeiten (speziell von Sphären in Mannigfaltigkeiten) mengentheoretisch definiert und damit ein Thema angerissen, durch das eine weitere Verbindung zwischen allgemeiner Topologie und Analysis Situs hergestellt wurde.²⁸⁴ Dies führte zu neuen Aspekten in der Formulierung und der Beweismethode für die Einbettungssätze

²⁸²Für ein zeitgenössisches, nur schwach Partei beziehendes Resümee der genannten Diskussion siehe [W 1929]. Zu REIDEMEISTER siehe [Ep 1999], [Ep 1994], zu WEYL [Scho 1999], 48–55.

²⁸³Siehe [St 1957], 24f.

²⁸⁴Zu HUREWICZ siehe [McC 2000], S. 9.

von WHITNEY, die dieser zunächst noch analytisch durch Approximation und Normabschätzungen formuliert hatte.

In dieser Weise können wir von einem zweiten “Aufgehen” des HAUSDORFF-schen Sterns sprechen, nun allerdings auch in dem weiteren Wortsinne einer Auflösung in einem größeren Zusammenhang. Der von HAUSDORFF in den *Grundzügen* vertretene und begonnene begrifflich-strukturelle Aufbau mathematischer Theorien auf einheitlicher mengentheoretischer Grundlage kam nun “weltweit” zur Geltung. Sein Buch und seine Arbeiten spielten für die Generation der daran beteiligten Mathematiker freilich nur noch eine indirekte Rolle, vermittelt über die Arbeiten der polnischen Schule der Topologie und die Monographie von ALEXANDROFF/HOPF. HAUSDORFFS Zugang zur Mathematik im Allgemeinen und zur Topologie im Besonderen wurde jedoch auch weiterhin, etwa durch die BOURBAKI-Gruppe und in deren Umfeld, als paradigmatisch für die eigenen Bestrebungen angesehen.²⁸⁵ Jedoch konnte HAUSDORFF an dieser Phase der Vertiefung und Verbreitung der “modernen” strukturellen Auffassung der Mathematik aufgrund des Ausreiseverbots aus Nazi-Deutschland nicht mehr aktiv teilnehmen.²⁸⁶

Der konsequente Ausbau des strukturellen Gesichtspunktes führte dazu, daß Strukturen, die in der älteren Analysis Situs als miteinander verbunden angesehen wurden, nun begrifflich und methodisch voneinander getrennt wurden. Dieser Prozeß begann zunächst mit einer klaren begrifflichen Unterscheidung der verschiedenen Strukturen, etwa der topologischen und der algebraischen bei kontinuierlichen Gruppen,²⁸⁷ oder der kombinatorischen, stetigen, stückweise linearen oder differenzierbaren bei Mannigfaltigkeiten.²⁸⁸ In der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts wurde Schritt für Schritt deutlich, daß mit diesen Unterscheidungen in den Dimensionen $n > 3$ auch Unterschiede in den studierten Objekten verbunden sind.

Den ersten Schritt dieser Art machte J. MILNOR im Jahre 1956 durch den Nachweis, daß auf der 7-Sphäre unterschiedliche differenzierbare Strukturen eingeführt werden können. Fünf Jahre später konstruierte er für alle Dimensionen größer als 5 Beispiele von zueinander homöomorphen, aber nicht kombinatorisch äquivalenten simplizialen Komplexen.²⁸⁹ Damit war gezeigt, daß die Hauptvermutung nicht für die ganze Kategorie der simplizialen Komplexe gilt. Noch wurde allerdings für wahrscheinlich gehalten, daß die Hauptvermutung für PL-Mannigfaltigkeiten richtig ist. Ende der 1960er Jahre stellten

²⁸⁵Das kommt in der weiter oben zitierten (aus historischer Sicht etwas überzogen) hervorgehobenen Stellung HAUSDORFFS in den *Notices historiques* BOURBAKIS zum Ausdruck. Siehe auch die Beobachtungen von L. BEAULIEU und die Bemerkungen in dem Brief von LÊ DŨNG TRÁNG an E. BRIESKORN (S. 68).

²⁸⁶Siehe die Ausführungen zur Biographie in Band I dieser Edition.

²⁸⁷Einführung der topologischen Struktur von Gruppen bei [Schr 1926, 1927], [Lej 1927].

²⁸⁸Eine deutliche Unterscheidung von stetiger und kombinatorischer Struktur findet sich bei KNESER ([Kn 1926]); bei ALEXANDER ([Al 1930]) findet sich die aus BROUWERS Ansatz der simplizialen Approximation hervorgehende stückweise lineare (PL-) Struktur und bei VEBLEN/WHITEHEAD ([VWhi 1931, 1932]) die Unterscheidung von stetiger (C^0) und differenzierbaren ($C^k, k \geq 1$) Strukturen.

²⁸⁹[Mi 1956, 1961].

dann jedoch R. C. KIRBY und L. C. SIEBENMANN die Kohomologiehindernisse zur Charakterisierung der PL-Struktur auf, durch die wenig später das grundsätzliche Auseinandertreten der stetigen und der PL-Struktur bei geeignet gewählten Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension $n \geq 5$ nachgewiesen werden konnte.²⁹⁰

Aus MILNORS Ergebnissen von 1956 folgte auch schon, daß PL- und differenzierbare Struktur von Mannigfaltigkeiten für $n > 4$ auseinandertreten können.²⁹¹ Wie weit diese Lücke der Strukturen klafft, wurde durch die Arbeiten von R. C. KIRBY und L. SIEBENMANN schärfer herausgearbeitet, indem sie neue, komplizierte kohomologietheoretische Hindernisse für die Glättbarkeit von PL-Mannigfaltigkeiten aufstellten ([KiSi 1977]). Dies lieferte weitere kompakte Mannigfaltigkeiten der Dimension $n > 4$, die mehrere differenzierbare Strukturen tragen. Dagegen folgt für den \mathbb{R}^n , der kohomologietheoretisch trivial ist, daß es im Fall $n > 4$ nur eine differenzierbare Struktur gibt.

Seit den frühen 1980er Jahren wurde dann schließlich durch die Arbeiten von M. FREEDMAN und S. DONALDSON klar, daß bemerkenswerterweise gerade in der Dimension 4 differenzierbare und stetige Struktur von Mannigfaltigkeiten drastisch auseinanderfallen können.²⁹² Zum einen konstruierte FREEDMAN unendlich viele 4-Mannigfaltigkeiten, auf denen nach einem von DONALDSON etwa zeitgleich bewiesenen Satz keine differenzierbare Strukturen existieren können. Zum anderen konnte FREEDMAN mit DONALDSONs Ergebnis schließen, daß auf dem \mathbb{R}^4 verschiedene – sogar überabzählbar viele – differenzierbare Strukturen existieren.²⁹³ Dieses Ergebnis war umso bemerkenswerter, als nach Sätzen von MOISE und den zuletzt genannten Resultaten von KIRBY und SIEBENMANN auf \mathbb{R}^n für alle $n \neq 4$ nur die differenzierbare Standardstruktur existiert. Methodisch und inhaltlich kamen die jeweils für sich überraschenden Beiträge von DONALDSON und FREEDMAN aus ganz verschiedenen Forschungsrichtungen. DONALDSON führte ein neues analytisches Werkzeug in die Differentialtopologie von 4-dimensionalen Mannigfaltigkeiten ein, indem er zur Entdeckung subtiler differentialtopologischer Eigenschaften den Modulraum von Lösungen gewisser aus der Differentialgeometrie der Mannigfaltigkeiten, beziehungsweise aus der theoretischen Physik stammender partieller Differentialgleichungen (Yang-

²⁹⁰Es konnten nun Mannigfaltigkeiten in jeder Dimension ≥ 5 mit unterschiedlichen PL-Strukturen gebildet werden und Mannigfaltigkeiten, die nicht PL-triangulierbar sind ([KiSi 1969]).

²⁹¹Die von MILNORS "exotischen" differenzierbaren Strukturen der S^7 induzierten PL-Strukturen sind alle PL-homöomorph zur Standard-7-Sphäre.

²⁹²[Free 1982], [Do 1983]. Dagegen stehen nach einem Ergebnis von J. CERF aus den späten 1960er Jahren in dieser Dimension PL- und differenzierbare Struktur in 1:1-Beziehung zueinander ([Cer 1968]). Für einen zeithistorischen Überblick siehe [Kre 1994].

²⁹³FREEDMAN zeigte, daß z. B. die Kummerfläche eine zu \mathbb{R}^4 homöomorphe offene Teilmenge besitzt, die jedoch nicht diffeomorph zu \mathbb{R}^4 sein kann, weil sonst die Kummerfläche in einer Weise differenzierbar zerlegbar wäre, die nach DONALDSON unmöglich ist (publiziert durch GOMPFF, [Go 1983]). Er bot sogar eine ganze durch \mathbb{R} parametrisierte Schar solcher zu \mathbb{R}^4 homöomorpher differenzierbarer Mannigfaltigkeiten an, von denen TAUBES nach einer Verfeinerung der DONALDSONSchen Methoden zeigen konnte, daß sie paarweise unterschiedliche differenzierbare Strukturen besitzen ([Ta 1987]).

Mills Gleichungen) betrachtete. Man könnte diese Modulräume mit einem Mikroskop vergleichen, weil sie in Kombination mit algebraisch-topologischen und algebraisch-geometrischen Methoden bei der Untersuchung ihrer Topologie Unterschiede sichtbar machen, die mit vorher bekannten Methoden nicht erkennbar waren. FREEDMAN arbeitete dagegen mit einer höchst komplexen Fortführung und Weiterentwicklung von geometrisch-konstruktiven und unendlich iterierten Methoden der geometrischen Topologie von C^0 -Mannigfaltigkeiten, wie sie besonders von BING und seinen Schülern entwickelt worden waren und bei den Beweisen von höherdimensionalen SCHOENFLIES-Sätzen zum Tragen kommen.

Bei einem Rückblick auf das soeben vergangene Jahrhundert ist damit festzustellen, daß die "rein" topologische Theorie der Mannigfaltigkeiten erst langsam und spät, im Zeitraum zwischen Mitte der 1950er bis Anfang der 1980er Jahre, eine Eigenständigkeit des Objektbereiches gegenüber der Differential- und der PL-Topologie bekommen hat, die vor der Jahrhundertmitte nicht zu erwarten war und einigen Erwartungen der alten Analysis Situs, wie etwa der "Hauptvermutung", sogar zuwider lief. Erst in der strukturell ausdifferenzierten geometrischen Topologie der Mannigfaltigkeiten, die in der zweiten Hälfte des vergangenen Jahrhunderts gewissermaßen die spätmoderne Nachfolge der älteren Analysis Situs angetreten hat, wurde der von HAUSDORFF eingenommene Standpunkt reiner Stetigkeitstopologie schließlich auch in diesem Gebiet methodisch und extensional, d. h. bezüglich des betrachteten Objektfeldes, "real". Sein Zugang zur Topologie war nun, fast ein halbes Jahrhundert nach der ersten Aufnahme der Begrifflichkeit der allgemeinen (mengentheoretischen) Topologie in der Theorie der Mannigfaltigkeiten und Komplexe, in die Denkweise der geometrischen Topologie so wirksam eingegangen und so allgegenwärtig wie die "Luft, die wir atmen und auf der die Vögel fliegen".²⁹⁴ Diese Realisierung einer "rein topologischen" Theorie der Mannigfaltigkeiten war aber erst möglich, nachdem zuvor die algebraische Topologie hoch entwickelt worden war und als Vorbilder die geometrische Topologie der differenzierbaren und der PL-Mannigfaltigkeiten entstanden waren.

3.5 Schlußbemerkungen

Es gibt bis heute keine Werkbiographie HAUSDORFFs. In den wenigen vorhandenen biographischen Skizzen werden stets auch die *Grundzüge* gewürdigt. So schreibt M. KATĚTOV im *Dictionary of Scientific Biography*:

The interrelations of these different approaches [gemeint sind die Vorarbeiten von FRÉCHET und anderen – W. P.] had not been completely recognized; and no clear way had been known to effect a gradual transition from very general spaces to those similar to spaces actually occurring in analysis and geometry.

²⁹⁴Diese Metapher verdanken wir F. QUINN, einem der herausragenden Vertreter dieses Arbeitsgebietes (hier sinngemäß und in deutscher Übersetzung zitiert aus einem Gespräch von F. QUINN mit M. KRECK über die Bedeutung der HAUSDORFFschen *Grundzüge* für die heutige geometrische Topologie).

In the *Grundzüge*, Hausdorff took a decisive step in this direction. His broad approach, his aesthetic feeling, and his sense of balance may have played a substantial part. He succeeded in creating a theory of topological and metric spaces into which the previous results fitted well, and he enriched it with many new notions and theorems. From the modern point of view, the *Grundzüge* contained, in addition to other special topics, the beginnings of the theories of topological and metric spaces, which are now included in all textbooks on the subject. In the *Grundzüge*, these theories were laid down in such a way that a strong impetus was provided for their further development. Thus, Hausdorff can rightly be considered the founder of general topology and of the general theory of metric spaces.²⁹⁵

Im Jahre 1972 waren 60 Jahre vergangen, seit HAUSDORFF seine Arbeit an den *Grundzügen der Mengenlehre* begonnen hatte. In das gleiche Jahr fiel der 30. Jahrestag seines tragischen Todes. Beide Ereignisse waren der Anlaß für die Edition eines Sammelbandes *Theory of Sets and Topology. In Honour of Felix Hausdorff (1868–1942)*, zu dessen Autoren neben jungen Forschern auch eine Reihe prominenter Mathematiker aus verschiedenen Ländern zählten. Im Vorwort zitieren die Herausgeber eine längere Passage aus HAUSDORFFs *Grundzügen*, um dann festzustellen:

Ganze Generationen junger Mathematiker haben aus diesem Buch wesentliche Kenntnisse und Anregungen erhalten, und es ist zu wünschen, daß auch heute noch viele Lernende zu diesem Werk greifen mögen, das von einer zeitlosen Modernität ist. Man kann wohl mit Recht behaupten, daß die „Grundzüge der Mengenlehre“ und die Einzelarbeiten Hausdorffs einen entscheidenden Einfluß auf die Entwicklung der Mengenlehre, der allgemeinen Topologie, der Maßtheorie und damit der gesamten Mathematik ausübten.²⁹⁶

Zur Rezeption der *Grundzüge* sei schließlich noch bemerkt, daß auch ein bekannter Schriftsteller, für dessen Schaffen seine mathematischen Kenntnisse nicht ohne Bedeutung waren, die *Grundzüge* eingehend studiert hat, HERMANN BROCH.²⁹⁷

Literatur

[AH 1935] ALEXANDROFF, P.; HOPF, H.: *Topologie I*. Springer-Verlag, Berlin 1935.

[AU 1929] ALEXANDROFF, P.; URYSOHN, P.: *Mémoire sur les espaces topologiques compacts*. Verh. Akad. Wetenschappen Amsterdam **14** (1929), 1–96.

²⁹⁵[Ka 1972], S. 176–177.

²⁹⁶[AsFlRin 1972], S. 6.

²⁹⁷[Lu 1985], S. 96.

- [Al 1924] ALEXANDER, J. W.: *An example of a simply connected surface bounding a region which is not simply connected*. Proceedings National Academy of Sciences USA **10** (1924), 8–10.
- [Al 1930] ALEXANDER, J. W.: *The combinatorial theory of complexes*. Annals of Mathematics **32** (1930), 294–322.
- [An 1920] ANTOINE, M. L.: *Sur la possibilité d'étendre l'homéomorphisme de deux figures à leurs voisinages*. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **171** (1920), 661–663.
- [ArFo 1948] ARTIN, E.; FOX, R. H.: *Some wild cells and spheres in three-dimensional space*. Annals of Mathematics **49** (1948), 979–990.
- [AsFIRin 1972] ASSER, G.; FLACHSMEYER, J.; RINOW, W. (Eds.): *Theory of Sets and Topology. In Honour of Felix Hausdorff (1868–1942)*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1972.
- [AuLo 1997/1998] AULL, C. E.; LOWEN, R. (Eds.): *Handbook of the History of General Topology*. Kluwer, Dordrecht–Boston–London. Vol. I, 1997; Vol. II, 1998.
- [AuLo 2001] AULL, C. E.; LOWEN, R. (Eds.): *Handbook of the History of General Topology*. Kluwer, Dordrecht–Boston–London. Vol. III, 2001.
- [B 1905] BAIRE, R.: *Leçons sur les fonctions discontinues*. Gauthier-Villars, Paris 1905 (Collection Borel).
- [Ba 1922] BANACH, S.: *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*. Fundamenta Math. **3** (1922), 133–181.
- [Ba 1923] BANACH, S.: *Sur le problème de la mesure*. Fundamenta Math. **4** (1923), 7–33.
- [Ba 1932] BANACH, S.: *Théorie des opérations linéaires*. Monografie Matematyczne, vol. I, Warszawa 1932.
- [BaT 1924] BANACH, S.; TARSKI, A.: *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruents*. Fundamenta Math. **6** (1924), 244–277.
- [Be 1989] BEAULIEU, L.: *Bourbaki. Une histoire du groupe de mathématiciens français et de ses travaux (1934–1944)*. Thèse, Paris 1989 (ungedruckt).
- [Bl 1920] BLUMBERG, H.: *Hausdorff's Grundzüge der Mengenlehre*. Rezension in Bulletin of the AMS **27** (Dez. 1920), 116–129.
- [Bo 1898] BOREL, E.: *Leçons sur la théorie des fonctions*. Gauthier-Villars, Paris 1898 (Collection Borel).

- [Bo 1905] BOREL, E.: *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes*. Gauthier-Villars, Paris 1905 (Collection Borel).
- [Bou 1939] BOURBAKI, N.: *Théorie des ensembles (Fascicule de résultats)*. Hermann, Paris 1939.
- [Bou 1940] BOURBAKI, N.: *Topologie générale*. Hermann, Paris 1940 (Chap. I, II).
- [Bou 1948] BOURBAKI, N.: *L'Architecture de Mathématique*. In: F. LE LIONNAIS (ed.) : *Le grands courants de la pensée mathématique*. Paris 1948. Deutsch: *Physikalische Blätter* 17 (1961), 161–166, 212–218. WA: M. OTTE (Ed.) *Mathematiker über die Mathematik*. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1974, 140–159.
- [Bou 1960] BOURBAKI, N.: *Éléments d'histoire des mathématiques*. Hermann, Paris 1960.
- [Bou 1971] BOURBAKI, N.: *Elemente der Mathematikgeschichte*. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1971. (Übersetzung von [Bou 1960]).
- [Br 1910] BROUWER, L. E. J.: *Zur Analysis Situs*. *Math. Annalen* **68** (1910), 422–434.
- [Br 1911] BROUWER, L. E. J.: *Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl*. *Math. Annalen* **70** (1911), 161–165.
- [Bu 1897] BURALI-FORTI, C.: *Una questione sui numeri transfiniti*. *Rendiconti Circolo Matematico di Palermo* **11** (1897), 154–164.
- [C 1982] CAMERON, D. E.: *The birth of Soviet topology*. *Topology proceedings* **7** (1982), 329–378.
- [Ca 1874] CANTOR, G.: *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **77** (1874), 258–262. WA: [Ca 1932], 115–118.
- [Ca 1878] CANTOR, G.: *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **84** (1878), 242–258. WA: [Ca 1932], 119–133.
- [Ca 1883] CANTOR, G.: *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*. *Math. Annalen* **21** (1883), 545–586. WA: [Ca 1932], 165–209.
- [Ca 1892] CANTOR, G.: *Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre*. *Jahresbericht der DMV* **1** (1892) (für die Jahre 1890–1891), 75–78. WA: [Ca 1932], 278–281.

- [Ca 1895/1897] CANTOR, G.: *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*. Math. Annalen **46** (1895), 481–512; **49** (1897), 207–246. WA: [Ca 1932], 282–356.
- [Ca 1932] CANTOR, G.: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. Ed.: E. ZERMELO. Springer-Verlag, Berlin 1932.
- [Če 1937] ČECH, E.: *Topologické prostory*. Časopis pro pěstování matematiky a fyziky **66** (1937), 225–264. Engl. Übers. in: ČECH, E.: *Topological papers*. Prague 1968, 437–472.
- [Cer 1968] CERF, J.: *Sur les difféomorphismes de la sphère de dimension trois* ($\Gamma_4 = 0$). Lecture Notes in Mathematics, No. 53. Springer, Berlin etc. 1968.
- [Co 1996] CORRY, L.: *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*. Birkhäuser, Basel 1996.
- [D 1986] DAVERMAN, R. J.: *Decompositions of Manifolds*. Academic Press, Orlando etc. 1986.
- [De 1888/1967] DEDEKIND, R.: *Was sind und was sollen die Zahlen?* Vieweg, Braunschweig 1888. 11. Aufl., DVW, Berlin 1967.
- [Dem 1988] DEMIDOV, S. S.: *On an Early History of the Moscow School of Theory of Functions*. Philosophia Mathematica **3** (1988), 29–35.
- [Di 1878] DINI, U.: *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*. Nistri, Pisa 1878.
- [Di 1892] DINI, U.: *Grundlagen für die Theorie der Funktionen einer veränderlichen reellen Grösse*. Teubner, Leipzig 1892 (Übersetzung von [Di 1878]).
- [Do 1983] DONALDSON, S.: *An application of gauge theory to the topology of 4-manifolds*. Journal of Differential Geometry **18** (1983), 279–315.
- [DosTi 1978] DOSTAL, M.; TINDELL, R.: *The Jordan Curve Theorem Revisited*. Jahresbericht der DMV **81** (1978), 111–128.
- [Dow 1992] DOW, A.: *Set Theory in Topology*. In: HUŠEK, M.; VAN MILL, J. (Eds.): *Recent Progress in General Topology*. North-Holland, Amsterdam 1992, 167–197.
- [Du 1996] DUDA, R.: *Fundamenta Mathematicae and the Warsaw School of Mathematics*. In: C. GOLDSTEIN, J. GRAY, J. RITTER (Eds.): *Mathematical Europe – History, Myth, Identity*. Éditions de la Maison des sciences de l’homme, Paris 1996, 479–498.

- [duB 1892] DU BOIS-REYMOND, P.: *Die allgemeine Functionentheorie. Erster Theil*. Lauppische Buchhandlung, Tübingen 1882.
- [ETh 1994] EICHHORN, E.; THIELE, E.-J. (Eds.) *Vorlesungen zum Gedenken an Felix Hausdorff*. Heldermann, Berlin 1994.
- [Ed 1978] EDWARDS, R. D.: *The topology of manifolds and cell-like maps*. In: *Proceedings Int. Congress of Mathematicians 1978*, ed. O. LEHTO. Acad. Sci. Fenn., Helsinki 1980.
- [En 1998] ENGELKING, R.: *Kazimierz Kuratowski (1896–1980). His Life and Work in Topology*. In: [AuLo 1997/1998], vol. II, 431–452.
- [Ep 1994] EPPLE, M.: *Kombinatorische Topologie und exaktes Denken*. In: *Die Albertus-Magnus Universität Königsberg und ihre Professoren*. Ed.: D. VON NERÉE RAUSCHNING. Duncker und Humblot, Berlin 1994, S. 567–575.
- [Ep 1999] EPPLE, M.: *Die Entstehung der Knotentheorie*. Vieweg, Braunschweig 1999.
- [F 1999] FERREIRÓS, J.: *Labyrinths of Thought. A History of Set Theory and its Role in Modern Mathematics*. Birkhäuser, Basel - Boston - Berlin 1999.
- [Fe 1979] FELGNER, U. (Ed.): *Mengenlehre*. Wiss. Buchgesellschaft, Darmstadt 1979.
- [Fr 1914] FRAENKEL, A.: *Über die Teiler der Null und die Zerlegung von Ringen*. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **145** (1914), 139–176.
- [Fr 1919] FRAENKEL, A.: *Einleitung in die Mengenlehre. Eine allgemeinverständliche Einführung in das Reich der unendlichen Größen*. Springer-Verlag, Berlin 1919.
- [Fr 1922] FRAENKEL, A.: *Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre*. *Math. Annalen* **86** (1922), 230–237. WA: [Fe 1979], 49–56.
- [Fr 1923] FRAENKEL, A.: *Einleitung in die Mengenlehre*. 2. Aufl. von [Fr 1919]. Springer-Verlag, Berlin 1923.
- [Fr 1927] FRAENKEL, A.: *Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre*. Teubner, Leipzig - Berlin 1927.
- [Fr 1928] FRAENKEL, A.: *Einleitung in die Mengenlehre*. 3. Aufl. von [Fr 1919]. Springer-Verlag, Berlin 1928.
- [Fr 1930] FRAENKEL, A.: *Georg Cantor*. *Jahresbericht der DMV* **39** (1930), 189–266.

- [Fré 1906] FRÉCHET, M.: *Sur quelques points du calcul fonctionnel*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **22** (1906), 1–74.
- [Fré 1921] FRÉCHET, M.: *Sur les ensembles abstraits*. Annales École Normale Sup. **38** (1921), 341–388.
- [Fré 1925] FRÉCHET, M.: *L'analyse générale et les ensembles abstraits*. Revue de Métaphysique et de Morale **32** (1925), 1–30.
- [Fré 1926] FRÉCHET, M.: *Sur la notion de voisinage dans un espace discret*. Fundamenta Math. **8** (1926), 151–159.
- [Fré 1928] FRÉCHET, M.: *Les espaces abstraits et leur théorie considérée comme introduction à l'analyse générale*. Gauthier-Villars, Paris 1928 (Collection Borel).
- [Free 1982] FREEDMAN, M. H.: *The topology of four-dimensional manifolds*. Journal of Differential Geometry **17** (1982), 357–453.
- [Frege 1903] FREGE, G.: *Grundgesetze der Arithmetik*. Band 2, Pohle, Jena 1903.
- [G 1944] GÖDEL, K.: *Russell's Mathematical Logic*. In: P. A. SCHILPP (Ed.): *The Philosophy of Bertrand Russell*. Open Court, La Salle (Ill.) 1944. WA: K. GÖDEL: *Collected Works*, vol. 2, 119–141.
- [Go 1983] GOMPf, R. E.: *Three exotic \mathbb{R}^4 's and other anomalies*. Journal of Differential Geometry **18** (1983), 317–328.
- [GotKre 1984] GOTTWALD, S.; KREISER, L.: *Paul Mahlo – Leben und Werk*. NTM – Schriftenreihe Gesch. der Naturwiss., Technik u. Medizin **21** (1984), 1–22.
- [Gr 1924] GRELLING, K.: *Mengenlehre*. Math.-phys. Bibliothek Nr. 58. Teubner, Leipzig - Berlin 1924.
- [HSchog 1926] HAALMEIJER, B. P.; SCHOGT, J. H.: *Inleiding tot de leer der verzamelingen*. Groningen 1926.
- [Ha 1943] HARDY, G. H.: *William Henry Young 1863–1942*. Obituary Notices of Fellows of the Royal Society. Vol. 4, November 1943, 307–323. WA: [YY 2000], 1–17.
- [He 1906] HESSENBERG, G.: *Grundbegriffe der Mengenlehre*. Abhandlungen der Friesschen Schule. Bd. I, Heft 4 (1906), 478–706. Auch selbständig gebunden erschienen bei Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1906.
- [He 1908] HESSENBERG, G.: *Willkürliche Schöpfungen des Verstandes?* Jahresbericht der DMV **17** (1908), 145–162.

- [He 1909] HESSENBERG, G.: *Kettentheorie und Wohlordnung*. Journal für die reine und angewandte Mathematik **135** (1909), 81–133.
- [Hi 1900] HILBERT, D.: *Mathematische Probleme*. Vortrag, gehalten auf dem Internat. Mathematiker-Kongreß zu Paris 1900. Nachrichten der Königl. Ges. der Wiss. zu Göttingen. Math.-phys. Klasse, 1900, 253–297. WA: D. HILBERT: *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. III, Berlin 1935, 290–329.
- [Hi 1909/1910] HILBERT, D.: *Hermann Minkowski*. Nachrichten der Königl. Ges. der Wiss. zu Göttingen. Math.-phys. Klasse, 1909. Geschäftliche Mitteilungen, S. 72–101. WA: Math. Annalen **68** (1910), 445–471 und D. HILBERT: *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. III, Berlin 1935, 339–364.
- [Hi 1925] HILBERT, D.: *Über das Unendliche*. Math. Annalen **95** (1925), 161–190.
- [Ho 1907] HOBSON, E. W.: *The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier's Series*. Cambridge University Press, Cambridge 1907.
- [HowRub 1998] HOWARD, P.; RUBIN, J. E.: *Consequences of the Axiom of Choice*. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 59, AMS Publ., Providence (RI) 1998.
- [I 1985] ILGAUDS, H.-J.: *Zur Biographie von Felix Hausdorff*. Mitteilungen der Math. Ges. der DDR, Heft 2–3 (1985), 59–70.
- [J 1999] JAMES, I. (Ed.): *History of Topology*. Elsevier, Amsterdam etc. 1999.
- [J 2001] JAMES, I.: *Combinatorial topology versus point-set topology*. In: [Au-Lo 2001], 809–834.
- [Jo 1979] JOHNSON, D. M.: *The Problem of the Invariance of Dimension in the Growth of Modern Topology. I*. Archive for History of Exact Sciences **20** (1979), 97–188.
- [Jo 1981] JOHNSON, D. M.: *The Problem of the Invariance of Dimension in the Growth of Modern Topology. II*. Archive for History of Exact Sciences **25** (1981), 85–267.
- [K 1928] KAMKE, E.: *Mengenlehre*. Sammlung Göschen Nr. 999. de Gruyter, Berlin - Leipzig 1928.
- [Ka 1972] KATĚTOV, M.: *Felix Hausdorff*. Dictionary of Scientific Biography. Vol. VI. Charles Scribner's, New York 1972, 176–177.
- [Ke 1923] KERÉKJÁRTÓ, B. VON: *Vorlesungen über Topologie I: Flächentopologie*. Springer-Verlag, Berlin 1923.

- [Ker 1983] KERTÉSZ, A.: *Georg Cantor – Schöpfer der Mengenlehre*. Acta historica Leopoldina **15** (1983).
- [KiSi 1969] KIRBY, R.; SIEBENMANN, L.: *On the triangulation of manifolds and the Hauptvermutung*. Bulletin of the AMS **75** (1969), 742–749.
- [KiSi 1977] KIRBY, R.; SIEBENMANN, L.: *Foundational Essays on Topological Manifolds, Smoothings, and Triangulations*. Princeton University Press, Princeton 1977.
- [Kn 1926] KNESER, H.: *Die Topologie der Mannigfaltigkeiten*. Jahresbericht der DMV **34** (1926), 1–14.
- [Koe 1914] KÖNIG, J.: *Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik und Mengenlehre*. Ed.: D. KÖNIG. Veit & Co., Leipzig 1914.
- [Kow 1950] KOWALEWSKI, G.: *Bestand und Wandel*. Oldenbourg, München 1950.
- [Kr 1905] KRAZER, A. (Ed.): *Verhandlungen des dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8.–13. August 1904*. Teubner, Leipzig 1905.
- [Kre 1994] KRECK, M.: *Ist 4 denn noch normal?* In: *Duration and Change: Fifty Years at Oberwolfach*. Ed.: M. ATIYAH. Springer, Berlin etc. 1994, 237–253.
- [Ku 1922] KURATOWSKI, C.: *Une méthode d'élimination des nombres transfinis des raisonnements mathématiques*. Fundamenta Math. **3** (1922), 76–108.
- [Ku 1933] KURATOWSKI, C.: *Topologie I*. Monografie Matematyczne, vol. III, Warszawa 1933.
- [Kuz 1968] KUZAWA, SISTER M. G.: *The Genesis of a School in Poland*. New Haven College and Univ. Press, New Haven 1968.
- [Kuz 1970] KUZAWA, SISTER M. G.: *Fundamenta Mathematicae, An Examination of its Founding and Significance*. American Math. Monthly **77** (1970), 485–492.
- [L 1907] LEBESGUE, H.: Rezension von W. H. Young, G. Ch. Young *The Theory of Sets of Points*. Bull. des Sciences Mathématiques, Sér. 2, **31** (1907), 129–135.
- [Le 1924] LEFSCHETZ, S.: *L'analyse situs et la géométrie algébrique*. Gauthier-Villars, Paris 1924 (Collection Borel).
- [Le 1930] LEFSCHETZ, S.: *Topology*. AMS Coll. Publ., vol. XII. AMS Publ., New York 1930.

- [Le 1942] LEFSCHETZ, S.: *Algebraic Topology*. AMS Coll. Publ., vol. XXVII. AMS Publ., New York 1942.
- [Lej 1927] LEJA, F.: *Sur la notion du groupe abstrait topologique*. *Fundamenta Math.* **9** (1927), 37–44.
- [Li 1926] LITTLEWOOD, J. E.: *The Elements of the Theory of Real Functions*. Cambridge Univ. Press, Cambridge 1926.
- [Lu 1985] LÜTZELER, P. M.: *Hermann Broch. Eine Biographie*. Frankfurt am Main 1985.
- [Lus 1930] LUSIN, N.: *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications*. Gauthier-Villars, Paris 1930 (Collection Borel).
- [McC 2000] MCCLEARY, J.: *A history of manifolds and fibre spaces: tortoises and hares*. Vortragsmanuskript, Oberwolfach 2000. Erscheint in: *Rendiconti Circ. Mat. di Palermo*.
- [Me 1990] MEHRTENS, H.: *Moderne. Sprache. Mathematik*. Suhrkamp, Frankfurt/Main 1990.
- [Men 1928] MENGER, K.: *Dimensionstheorie*. Teubner, Leipzig - Berlin 1928.
- [Men 1932] MENGER, K.: *Kurventheorie*. Teubner, Leipzig - Berlin 1932.
- [Mes 1967] MESCHKOWSKI, H.: *Probleme des Unendlichen. Werk und Leben Georg Cantors*. Vieweg, Braunschweig 1967.
- [Mi 1956] MILNOR, J.: *On manifolds homeomorphic to the 7-sphere*. *Annals of Mathematics* **64** (1956), 399–405.
- [Mi 1961] MILNOR, J.: *Two complexes which are homeomorphic but combinatorially distinct*. *Annals of Mathematics* **74** (1961), 575–590.
- [Min 1973] MINKOWSKI, H.: *Briefe an David Hilbert*. Hrsg. von L. RÜDENBERG und H. ZASSENHAUS. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1973.
- [Mo 1982] MOORE, G. H.: *Zermelo's Axiom of Choice. Its Origins, Development and Influence*. Springer-Verlag, New York - Heidelberg - Berlin 1982.
- [Mo 1989] MOORE, G. H.: *Towards a History of Cantor's Continuum Problem*. In: ROWE, D.; MC CLEARY, J. (Eds.): *The History of Modern Mathematics*, Vol. I: Ideas and their reception. Academic Press, Boston - London 1989, 79–121.
- [MoGa 1981] MOORE, G. H.; GARCADIIEGO, A.: *Burali-Forti's Paradox: A Reappraisal of its Origins*. *Historia Mathematica* **8** (1981), 319–350.

- [**Moo 1932**] MOORE, R. L.: *Foundations of Point Set Theory*. AMS Coll. Publ., vol. XIII. AMS Publ., New York 1932.
- [**N 1923**] NATUCCI, A.: *Il concetto di numero et le sue estensioni*. Torino 1923.
- [**Ne 1907**] NEKRASSOV, W. L.: *Struktur und Inhalt der linearen Punktmengen* (Russisch). Univ. Tomsk 1907.
- [**Neu 1929**] NEUMANN, J. VON: *Zur allgemeinen Theorie des Maßes*. *Fundamenta Math.* **13** (1929), 73–116.
- [**O 1994**] OBERSCHELP, A.: *Allgemeine Mengenlehre*. BI, Mannheim - Leipzig - Wien 1994.
- [**P 1991**] PECKHAUS, V.: *Hilbertprogramm und kritische Philosophie*. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1991.
- [**Pi 1905/1912**] PIERPONT, J.: *The Theory of Functions of Real Variables*. Ginn and Co., Boston - New York - Chicago - London, vol. I, 1905; vol. II, 1912.
- [**Pu 1986**] PURKERT, W.: *Georg Cantor und die Antinomien der Mengenlehre*. *Bulletin de la Société Mathématique de Belgique* **38** (1986), 313–327.
- [**PuI 1987**] PURKERT, W.; ILGAUDS, H.-J.: *Georg Cantor*. Birkhäuser, Basel - Boston - Stuttgart 1987.
- [**Put 1967**] PUTNAM, H.: *The Thesis that Mathematics is Logic*. In: SCHOENMAN, R. (Ed.): *B. Russell, Philosopher of the Century*. Allen & Unwin, London 1967.
- [**Q 1941**] QUINE, W. V.: *Whitehead and the Rise of Modern Logic*. In: P. A. SCHILPP (Ed.): *The Philosophy of A. N. Whitehead*. Open Court, La Salle (Ill.) 1941, 127–163.
- [**RTho 1981**] RANG, B.; THOMAS, W.: *Zermelo's Discovery of the „Russell Paradox“*. *Historia Mathematica* **8** (1981), 15–22.
- [**Re 1932a**] REIDEMEISTER, K.: *Einführung in die kombinatorische Topologie*. Vieweg, Braunschweig 1932.
- [**Re 1932b**] REIDEMEISTER, K.: *Knotentheorie*. Springer, Berlin 1932.
- [**Ri 1907**] RIESZ, F.: *Die Genesis des Raumbegriffs*. *Mathematische und Naturwiss. Berichte aus Ungarn* **24** (1907), 309–353. WA: *Gesammelte Arbeiten*, Band I, Verlag der Akademie, Budapest 1960, 110–154.
- [**Ro 1991**] RODRIGUEZ CONSUEGRA, F.: *The Mathematical Philosophy of Bertrand Russell: Origin and Development*. Birkhäuser, Basel 1991.

- [Ros 1928] ROSENTHAL, A.: *F. Hausdorff, Mengenlehre*. Deutsche Literaturzeitung 1928, 294–295.
- [Ru 1975] RUDIN, M. E.: *Lectures on Set Theoretic Topology*. AMS Publ., Providence (RI) 1975.
- [Rud 1898] RUDIO, F. (Ed.): *Verhandlungen des ersten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Zürich vom 9. bis 11. August 1897*. Teubner, Leipzig 1898.
- [Rush 1973] RUSHING, T. B.: *Topological Embeddings*. Academic Press, New York–London 1973.
- [Rus 1903] RUSSELL, B.: *The Principles of Mathematics*. Cambridge Univ. Press, Cambridge 1903.
- [Rus 1959] RUSSELL, B.: *My philosophical development*. Allen & Unwin, London 1959.
- [S 1933] SAKS, S.: *Théorie de l'Intégrale*. Monografie Matematyczne, vol. II, Warszawa 1933.
- [Sch 1898] SCHOENFLIES, A.: *Mengenlehre*. In: *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, Band I, A5, Teubner, Leipzig 1898–1904, 184–207 (abgeschlossen im November 1898).
- [Sch 1900] SCHOENFLIES, A.: *Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten*. Jahresbericht der DMV **8** (1900), Heft 2.
- [Sch 1905] SCHOENFLIES, A.: *Über wohlgeordnete Mengen*. Math. Annalen **60** (1905), 181–186.
- [Sch 1906] SCHOENFLIES, A.: *Beiträge zur Theorie der Punktmengen III*. Math. Annalen **62** (1906), 286–328.
- [Sch 1908a] SCHOENFLIES, A.: *Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten*. Teil II. Jahresbericht der DMV. 2. Ergänzungsband, Teubner, Leipzig 1908.
- [Sch 1908b] SCHOENFLIES, A.: Rezension von W. H. Young und Grace Chisholm Young *The Theory of Sets of Points*. Cambridge 1906. Archiv der Mathematik und Physik. Dritte Reihe, Band **13** (1908), 333–335.
- [Sch 1911] SCHOENFLIES, A.: *Über die Stellung der Definition in der Axiomatik*. Jahresbericht der DMV **20** (1911), 222–255.
- [Sch 1913] SCHOENFLIES, A.: *Entwicklung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen. Erste Hälfte: Allgemeine Theorie der unendlichen Mengen und Theorie der Punktmengen*. (Umarbeitung des im VIII. Bande der Jahresberichte der DMV erstatteten Berichtes). Teubner, Leipzig - Berlin 1913.

- [Sch 1922] SCHOENFLIES, A.: *Zur Erinnerung an Georg Cantor*. Jahresbericht der DMV **31** (1922), 97–106.
- [Scho 1980] SCHOLZ, E.: *Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs von Riemann bis Poincaré*. Birkhäuser-Verlag, Boston–Basel–Stuttgart 1980.
- [Scho 1999] SCHOLZ, E.: *The concept of manifold, 1850–1950*. In [J 1999], 25–64.
- [Schr 1926] SCHREIER, O.: *Abstrakte topologische Gruppen*. Abhandlungen math. Sem. Hamburg **4** (1926), 15–32.
- [Schr 1927] SCHREIER, O.: *Die Verwandtschaft stetiger Gruppen im grossen*. Abhandlungen math. Sem. Hamburg **5** (1927), 233–244.
- [Sh 1907] SHEGALKIN, I. I.: *Transfinite Zahlen*. (Russisch). Universitätsdruckerei, Moskau 1907.
- [SeThr 1934] SEIFERT, H.; THRELFALL, W.: *Lehrbuch der Topologie*. Teubner, Leipzig 1934.
- [Sie 1970] SIEBENMANN, L.: *Topological Manifolds*. In: *Actes du Congrès international des mathématiciens de Nice, 1–10. Sept. 1970, tome 2*. Gauthier-Villars, Paris 1971, S. 133–163.
- [Si 1912] SIERPIŃSKI, W.: *Zarys teorii mnogości* (Abriß der Mengenlehre). Biblioteka matematyczno-fizyczna, Serya III, Vol. IX, Warszawa 1912.
- [Si 1928a] SIERPIŃSKI, W.: *Leçons sur les nombres transfinis*. Gauthier-Villars, Paris 1928 (Collection Borel).
- [Si 1928b] SIERPIŃSKI, W.: *Topologia ogólna* (Allgemeine Topologie). Warszawa 1928.
- [Si 1934a] SIERPIŃSKI, W.: *Hypothèse du continu*. Monografie Matematyczne, vol. IV, Warszawa 1934.
- [Si 1934b] SIERPIŃSKI, W.: *Introduction to General Topology*. Univ. of Toronto Press, Toronto 1934.
- [Sk 1922] SKOLEM, T.: *Einige Bemerkungen zur Axiomatischen Begründung der Mengenlehre*. Vortrag Helsingfors 1922. In: [Fe 1979], 57–72.
- [St 1957] STEENROD, N. S.: *The work and influence of Professor S. Lefschetz*. In: *Algebraic Geometry and Topology*. Princeton University Press, Princeton 1957.
- [Ste 1910] STEINITZ, E.: *Algebraische Theorie der Körper*. Journal für die reine und angewandte Mathematik **137** (1910), 167–309. Neu herausgegeben von H. HASSE und R. BAER, Berlin 1930.

- [T 1925] TARSKI, A.: *Quelques théorèmes sur les alephs*. Fundamenta Math. **7** (1925), 1–14.
- [Ta 1987] TAUBES, C. H.: *Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds*. Journal of Differential Geometry **25** (1987), 363–430.
- [Tay 1982] TAYLOR, A. E.: *A Study of Maurice Fréchet: I. His Early Work on Point Set Theory and the Theory of Functionals*. Archive for History of Exact Sciences **27** (1982), 233–295.
- [Tay 1985] TAYLOR, A. E.: *A Study of Maurice Fréchet: II. Mainly about his Work on General Topology, 1909–1928*. Archive for History of Exact Sciences **34** (1985), 279–380.
- [TuAs 1984] TUCKER, A.; ASPRAY, W. et al (interviewer): *Princeton Oral History Project. The Princeton Mathematics Community in the 1930s*. <http://www.princeton.edu/mudd/math/>.
- [U 1925/1926] URYSOHN, P.: *Mémoire sur les multiplicités Cantorienes*. Fundamenta Math. **7** (1925), 30–137; **8** (1926), 225–351.
- [V 1922] VEBLEN, O.: *Analysis Situs*. AMS Coll. Lectures, vol. V. AMS Publ., New York 1922.
- [VWhi 1931] VEBLEN, O.; WHITEHEAD, J. H.: *A set of axioms for differential geometry*. Proceedings National Academy of Sciences **17** (1931), 551–561.
- [VWhi 1932] VEBLEN, O.; WHITEHEAD, J. H.: *The Foundations of Differential Geometry*. Cambridge University Press, Cambridge 1932.
- [W 1929] WAERDEN, B. L. VAN DER: *Kombinatorische Topologie*. Jahresbericht der DMV **39** (1929), 121–139.
- [We 1937] WEIL, A.: *Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale*. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 551. Hermann, Paris 1937.
- [WhRus 1910–1913] WHITEHEAD, A. N.; RUSSELL, B.: *Principia Mathematica*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, Vol. 1, 1910, Vol. 2, 1912, Vol. 3, 1913.
- [Whi 1935] WHITEHEAD, J. H.: *A certain open manifold whose group is unity*. Quarterly Journal of Mathematics Oxford **6** (1935), 268–279.
- [Wi 1949] WILDER, R. L.: *Topology of Manifolds*. AMS Coll. Publ. vol. XXXII. AMS Publ., New York 1949.
- [Wi 1982] WILDER, R. L.: *The mathematical work of R. L. Moore: its background, nature, and influence*. Archive for History of Exact Sciences **26** (1982), 73–97.

- [Y 1910] YOUNG, W. H.: *The Fundamental Theorems of Differential Calculus*. Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics No. 10, Cambridge 1910.
- [YY 1905] YOUNG, W. H.; YOUNG, G. CH.: *The first Book of Geometry*. London 1905.
- [YY 1906] YOUNG, W. H.; YOUNG, G. CH.: *The Theory of Sets of Points*. Cambridge Univ. Press, Cambridge 1906.
- [YY 2000] YOUNG, W. H.; YOUNG, G. CH.: *Selected Papers*. Eds.: S. D. CHATTERJI; H. WEFELSCHIED. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne 2000.
- [Z 1904] ZERMELO, E.: *Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann (Aus einem an Herrn Hilbert gerichteten Briefe)*. Math. Annalen **59** (1904), 514–516.
- [Z 1908a] ZERMELO, E.: *Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung*. Math. Annalen **65** (1908), 107–128.
- [Z 1908b] ZERMELO, E.: *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I*. Math. Annalen **65** (1908), 261–281.