Die Hausdorffsche Theorie der η_α-Mengen und ihre Wirkungsgeschichte

U. Felgner

Inhalt:

1. Präludium: Cantors Isomorphie-Satz
2. Die Hausdorffsche „Zick-Zack"-Methode
3. Die Entdeckung der η_1-Mengen durch Du Bois-Reymond und Hausdorff
4. Anwendungen der η_1-Mengen in der Topologie
5. Die Hausdorffschen η_α-Mengen
6. η_α-Gruppen und η_α-Körper
7. Universell-homogene Modelle
8. Saturierte Modelle
9. Die Kardinalzahlen der saturierten Modelle

Im folgenden wird über Hausdorffs Theorie der η_α-Mengen, ihre Vorgeschichte und die Geschichte ihrer Wirkung in der Algebra, in der Topologie, in der Mengenlehre und in der Modelltheorie berichtet. In der Universellen Algebra führten Hausdorffs Ideen zu den Begriffen der „universellen" und der „homogenen" Strukturen und in der Modelltheorie zur Formulierung des Begriffs der „saturierten" Struktur und zu zahlreichen tiefliegenden Theoremen. In der Algebra hat Hausdorffs Theorie der η_α-Mengen ermöglicht, für den Steinitzschen Isomorphie-Satz aus der Theorie der Körper ein Analogon in der Theorie der formal-reellen Körper zu finden. Von großer Wirkung war auch das Hausdorffsche „Zick-Zack-Verfahren", das immer wieder imitiert wurde, wenn es darum ging, die Isomorphie zweier Strukturen zu zeigen.

1. Präludium: Cantors Isomorphie-Satz

Georg Cantor hatte im Jahre 1884 eine Theorie der Ordnungstypen entwickelt und seine Ergebnisse zu einer Arbeit mit dem Titel *Principien einer Theorie der Ordnungstypen, Erste Mitteilung* zusammengefaßt. Er hatte diese Arbeit im November 1884 zur Publikation an die schwedische Zeitschrift Acta Mathematica geschickt. Die Arbeit wurde zur Publikation angenommen, wurde gesetzt und CANTOR erhielt die Korrekturbögen, die er kurz darauf retournierte. Aber zu seiner großen Überraschung erhielt er Anfang März 1885 einen Brief vom Herausgeber, GÖSTA MITTAG-LEFFLER, in dem er gebeten wurde, seine Arbeit zurückzuziehen. MITTAG-LEFFLER konnte offenbar mit dieser Arbeit wenig anfangen und fand in ihr wohl auch zu wenig mathematische Substanz.

Diese Arbeit CANTORS blieb lange unpubliziert und erschien auch nicht in CANTORS *Gesammelten Abhandlungen* ([C 1932]). IVOR GRATTAN-GUINNESS hat sie wiederentdeckt und zusammen mit allen Dokumenten zu dieser Affäre 1970 publiziert ([Gr 1970], vergl. dazu auch [PI 1987], S. 129–131).

MITTAG-LEFFLER hatte mit seiner ablehnenden Haltung vielleicht nicht ganz unrecht. Aber CANTORS Arbeit enthielt dennoch ein vorzügliches Resultat, nämlich den folgenden berühmten Isomorphie-Satz:

1.1 Isomorphie-Satz: Je zwei abzählbare in-sich-dichte lineare Ordnungen ohne Randpunkte sind isomorph.

Den eindeutig bestimmten Isomorphie-Typ einer abzählbaren in-sich-dichten linear geordneten Menge ohne Randpunkte bezeichnete CANTOR mit dem kleinen griechischen Buchstaben η. Es gilt, wie CANTOR bemerkte: $\eta = \eta + \eta = \eta \cdot \eta$ etc. und $\eta^* = \eta$, wenn η^* die konverse Ordnung von η bezeichnet.

CANTOR publizierte den Isomorphie-Satz (und auch Teile seiner Theorie der Ordnungstypen) elf Jahre später in seiner großen Arbeit *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* ([C 1895/1897]). Er bewies ihn nicht mit dem sogenannten „Zick-Zack-Argument“, wie es heute üblich geworden ist, sondern mit der „einseitigen“ Variante dieses Arguments (siehe auch CANTORS Beweis-Skizze in seinem Brief vom 3. April 1888 an FRANZ GOLDSCHEIDER in: [C 1991], S. 307). Wir deuten CANTORS Beweis kurz an.

Beweis (nach CANTOR, 1888, 1895). Wenn $\langle A, \leq \rangle$ und $\langle B, \leq \rangle$ zwei dichte, abzählbare, linear geordnete Mengen ohne Randpunkte sind, und $A = \{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ und $B = \{b_n; n \in \mathbb{N}\}$ irgendwelche Abzählungen, dann wird die gesuchte ordnungstreue ein-eindeutige Abbildung f von A auf B wie folgt durch Rekursion erklärt: Sei $f(a_0) = b_0$. Wenn $k \geq 1$ und $f(a_j)$ für alle $j < k$ bereits definiert ist, dann sei sei $f(a_k)$ dasjenige Element b_m mit kleinstem Index m, das genauso zwischen den Elementen $f(a_0), f(a_1), \ldots f(a_{k-1})$ liegt, wie a_k zwischen $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$. Man geht also der Reihe nach alle Elemente von A durch und sucht sich dazu gleichliegende Bild-Elemente. Angenommen, f wäre nicht surjektiv. Dann sei n die kleinste Zahl so, daß b_n nicht im Bildbereich von f liegt. Sei s die kleinste Zahl mit

$$\{b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}\} \subseteq \{f(a_0), f(a_1), \ldots, f(a_s)\},$$

und sei $t > s$ die kleinste Zahl, so daß a_t genauso zwischen den $a_0, a_1, \ldots, a_s$ liegt, wie b_n zwischen den $f(a_0), f(a_1), \ldots, f(a_s)$. Nach Konstruktion gilt dann $f(a_t) = b_n$, im Widerspruch zur Wahl von b_n. f muß also doch surjektiv sein.

Beweis-Varianten.

(1) E. V. Huntington hat 1904 bemerkt, daß man die Surjektivität „gratis“ bekommt, wenn man in dem obigen Argument simultan in beiden Mengen A und B im n-ten Schritt das jeweils n-te Element betrachtet, a_{n-1} und b_{n-1}, und, sofern sie noch nicht unter den bisherigen Urbildern bzw. Bildern vorkommen, ähnlich wie oben, ihnen Bilder, bzw. Urbilder zuordnet ([Hu 1904]).

(2) F. Hausdorff hat am Argument von Cantor eine andere kleine Modifikation vorgenommen. In seinem Buch *Grundzüge der Mengenlehre* ([H 1914a]), S. 99–100, wird im Beweis unentwegt die Seite gewechselt. Wenn k gerade ist, verfährt man wie oben im Cantorschen Argument. Wenn k ungerade ist, dann wechselt man die Seite und betrachtet das Element von B mit kleinstem Index, das nicht unter $f(a_0), f(a_1), \ldots, f(a_{k-1})$ vorkommt und wählt dazu in A ein passendes Urbild. Dieses elegante Verfahren wird seit einiger Zeit „Zick-Zack-Verfahren“ genannt. Hausdorff selber sprach in seinen *Grundzügen* S. 183, von „alternierender Abbildung“.

Der Isomorphie-Satz und sein Beweis hat viele Mathematiker fasziniert und zu Fortentwicklungen angeregt. Thoralf Skolem beispielsweise erweiterte 1920 den Satz wie folgt:

1.2 Satz (Th. Skolem, 1920) Es seien M_1 und M_2 zwei abzählbare, in-sich-dichte linear-geordnete Mengen ohne Randpunkte. Für jedes $i \in \{1, 2\}$ sei P_i eine Partition von M_i in abzählbar-unendlich viele Klassen, wobei jede Klasse dicht in M_i ist. Dann gibt es einen Isomorphismus von M_1 auf M_2, der nicht nur ordnungstreu ist, sondern auch die vorgegebenen Klassen aufeinander abbildet.

Skolem beweist diese Verschärfung des Cantorschen Satzes mit der Hausdorffschen Zick-Zack-Methode (siehe [Sk 1920], §4).

2. Die Hausdorffsche „Zick-Zack“-Methode

Das Zick-Zack-Verfahren ist nicht auf die Theorie der geordneten Mengen beschränkt. Es kann genauso gut in der Algebra und vielen anderen Gebieten der Mathematik eingesetzt werden.

Das Zick-Zack-Verfahren ist jedoch nicht immer die einfachste Methode, um die Isomorphie zweier Modelle nachzuweisen. Wenn starke Struktursätze und Klassifikationstheoreme vorliegen, dann führt die einseitige Version möglicherweise schneller zum Ziele. Als Beispiel für diesen Fall nennen wir den berühmten Isomorphie-Satz von Ernst Steinitz:

2.1 Isomorphie-Satz (E. Steinitz, 1910): Je zwei überabzählbare algebraisch-abgeschlossene gleichmächtige Körper derselben Charakteristik sind isomorph.

STEINITZ ([St 1910]) selber bewies diesen Satz mit dem einseitigen Verfahren und so wird der Satz auch heute noch in den meisten Lehrbüchern der Algebra bewiesen. In der Tat, wenn K_1 und K_2 zwei algebraisch abgeschlossene Körper derselben Charakteristik und derselben überabzählbaren Mächtigkeit sind, dann haben sie isomorphe Primkörper P_i (für $i = 1, 2$), gleichmächtige Tranzendenzbasen T_i über P_i und die Körper K_i sind die algebraischen Abschlüsse der rein-transzendenten Erweiterungen $P_i(T_i)$. Die Isomorphie der rein-transzendenten Erweiterungen $P_1(T_1) \cong P_2(T_2)$ ist aus Mächtigkeitsgründen evident, und die Isomorphie ihrer algebraischen Abschlüsse ist auch ohne Zick-Zack-Argument leicht einzusehen (vergl. [St 1910], S. 287).

Es gibt aber auch viele Fälle, wo die einseitige Version nicht ausreicht und zur Konstruktion eines Isomorphismus das hin-und-her-springen zwischen den vorgegebenen Strukturen notwendig ist. Als Beispiel für diesen Fall nennen wir den folgenden klassischen Satz von ANGUS MACINTYRE ([M 1972]). Dieser Satz ist ein Seitenstück zum Isomorphie-Satz von STEINITZ, denn algebraisch-abgeschlossene Körper sind nach dem HILBERTschen Nullstellensatz existenziell-abgeschlossen.

2.2 Satz (A. MACINTYRE, 1972): Für zwei abzählbare, existenziell-abgeschlossene Gruppen G und H sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) G und H sind isomorph: $G \cong H$.

(ii) G ist in H und H ist in G einbettbar.

Es handelt sich hier um einen Satz vom Typ des DEDEKIND-BERNSTEINschen Äquivalenz-Satzes: zwei Mengen M und N sind gleichmächtig, wenn jede von ihnen mit einer Teilmenge der anderen gleichmächtig ist. Dabei sagen wir, daß die Gruppe G in die Gruppe H einbettbar ist, wenn G mit einer Untergruppe von H isomorph ist. Der Beweis des Satzes von MACINTYRE verwendet die Technik der HNN-Erweiterungen, um schrittweise im Zick-Zack-Verfahren einen lokal-inneren Isomorphismus von G auf H aufzubauen.

Eine andere prominente Anwendung des Zick-Zack-Verfahrens wird im Beweis des Satzes von KEISLER-SHELAH gegeben, demzufolge zwei Strukturen (derselben Signatur) genau dann elementar-äquivalent[1] sind, wenn sie isomorphe Ultrapotenzen haben (vergl. [K 1961]).

Die bekannteste Anwendung findet die Zick-Zack-Methode vermutlich im Beweis des Satzes von ENGELER, RYLL-NARDZEWSKI und SVENONIUS. Dieser Satz kennzeichnet die $\aleph_0$-kategorischen Theorien. Dabei wird eine Menge T von Aussagen (der 1. Stufe) $\aleph_0$-kategorisch genannt, wenn je zwei $\aleph_0$-mächtige Modelle von T isomorph sind (vergl. dazu auch 9.):

2.3 Satz (E. ENGELER, C. RYLL-NARDZEWSKI, L. SVENONIUS, 1959): Für jede vollständige Theorie T, die in einer abzählbaren Sprache der ersten Stufe formuliert ist, sind die folgenden beiden Eigenschaften äquivalent:

[1] Diesen Begriff aus der Mathematischen Logik besprechen wir ausführlich im Abschn. 8.

(i) T ist $\aleph_0$-kategorisch;

(ii) Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt: T hat nur endlich viele n-Typen.

Typen, die keine Haupttypen sind, haben Modelle, in denen sie „ausgelassen" werden (näheres über Typen in Abschnitt 9.). Mit diesem Argument wird die Implikation (i)⇒(ii) bewiesen. Im Beweis der Umkehrung (ii)⇒(i) lehnt man sich eng an den Beweis von Satz 1.1 an, allerdings unter Verwendung der Zick-Zack-Methode (vergl. [F 1980]).

Adrian Mathias hat vor etwa 16 Jahren die Frage gestellt, ob man diesen Satz wirklich nur unter Verwendung der Zick-Zack-Methode beweisen kann. Läßt sich der Satz nicht mit der einseitigen Variante wie in Cantors Isomorphie-Satz beweisen? Etwas genauer lautet die Frage von A. Mathias wie folgt:

Problem (Mathias, 1985). $\mathfrak{M} = \langle M, \ldots \rangle$ sei eine $\aleph_0$-kategorische Struktur mit abzählbar-unendlicher Grundmenge M und $M = \{a_i;\ i \in \mathbb{N}\} = \{b_i;\ i \in \mathbb{N}\}$ seien zwei verschiedene Abzählungen von M. Es sei eine Abbildung φ von M in M auf folgende Weise erklärt: $\varphi(a_i)$ = dasjenige b_m mit kleinstem Index m für das

$$t_{\mathfrak{M}}(a_i/\langle a_0, \ldots, a_{i-1}\rangle) = t_{\mathfrak{M}}(b_m/\langle \varphi(a_0), \cdots, \varphi(a_{i-1})\rangle)$$

gilt. Ist dann φ notwendig surjektiv? Dabei ist $t_{\mathfrak{M}}(a/\langle a_0, \ldots, a_{i-1}\rangle)$ der „Typ" des Elementes a in der Struktur $\mathfrak{M} = \langle M, \ldots \rangle$ über der Folge von Parametern $a_0, \ldots, a_{i-1}$, d. h. die Menge aller Formeln $\Phi(v_0, \ldots, v_i)$ (aus der Sprache der 1. Stufe von $\mathfrak{M}$), in der höchstens die Variablen $v_0, \ldots, v_i$ frei vorkommen, derart, daß $\Phi[a_0, \ldots, a_{i-1}, a]$ in $\mathfrak{M}$ gilt[2].

Diese Frage hatte Dougald Macpherson am 27. 2. 1986 in das *Problem book* des „Oxford-Queen Mary College Joint Seminar in Model Theory and Permutation Groups" eingetragen und damit publik gemacht. Partielle Antworten hat Peter Cameron gefunden und in seinem Buch über oligomorphe Permutationsgruppen ([Ca 1990], S. 124 ff) publiziert.

3. Die Entdeckung der η_1-Mengen durch Paul Du Bois-Reymond und Felix Hausdorff

P. Du Bois-Reymond hatte in verschiedenen Abhandlungen und Büchern aus den Jahren 1870 bis 1882 die Menge $\mathcal{M}$ aller strikt-monoton wachsenden Funktionen $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ betrachtet, für die $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ gilt, und ihren Endverlauf studiert ($\mathbb{R}^+$ sei die Menge alle positiven reellen Zahlen). Sein Ziel war dabei, die divergierenden Funktionen nach ihrer Geschwindigkeit des Unendlichwerdens zu graduieren, d. h. in einer linear geordneten Skala unterzubringen. Funktionen $f, g \in \mathcal{M}$ mit der Eigenschaft $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} \in \mathbb{R}$ haben für Du Bois-Reymond „gleiches Unendlich" (in Zeichen $g \sim f$). Wenn jedoch

[2] Der Begriff des „Typs" wurde in der Mitte des 20. Jahrhundert in die Mathematische Logik eingeführt. Er wurde unter der Bezeichnung „quidditas" („Washeit", „Quiddität") aber schon in der Scholastik diskutiert. In Abschnitt 9. wird ausführlicher auf diesen Begriff eingegangen.

$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \infty$ gilt, dann schrieb er $f < g$ und sagte, g hätte ein „größeres Unendlich“ als f. Er bewies in seiner Abhandlung [DuB 1873], S. 88–91, den folgenden Satz:

3.1 Satz (P. Du Bois-Reymond, 1873) *Zu jeder strikt-aufsteigenden, abzählbaren Folge von Funktionen $f_n(x) \in \mathcal{M}$, $f_0 < f_1 < f_2 \cdots$, gibt es eine dominierende Funktion $g(x)$, d. h. es gilt $f_n < g$ für alle natürlichen Zahlen n.*

Den Beweis hatte Du Bois-Reymond mit einem Diagonal-Argument geführt (siehe auch [DuB 1875], S. 365, oder auch [DuB 1882], S. 284). Bemerkenswert ist dabei, daß es sich hier wohl um die erste Anwendung eines Diagonal-Argumentes in der Mathematik handelt, etwa 15 Jahre bevor auch Cantor (1890) ein solches Argument verwendet hat. Émile Borel hat dem Satz von Du Bois-Reymond in seinem Buch *Leçons sur la Théorie des Fonctions* (Paris, 1898) einen Anhang von 12 Seiten gewidmet. Eine ausführliche Würdigung der Du Bois-Reymondschen Arbeiten gab G. Fisher in [Fi 1981].

Das System $\langle \mathcal{M}, < \rangle$ bezeichnete Du Bois-Reymond als „infinitäre Pantachie“[3] und nannte die Äquivalenzklassen $[f] = \{f;\ g \sim f\}$ „infinitäre Punkte“. Du Bois-Reymond hielt die Menge $\mathcal{P} = \{[f]; f \in \mathcal{M}\}$ dieser infinitären Punkte für ein nicht-archimedisch angeordnetes Kontinuum ([DuB 1882], S. 280, 283). Das ist allerdings nicht richtig. Es handelt sich lediglich um eine partiell-geordnete Menge, wie wohl zuerst Cantor 1893 ([C 1895]) bemerkt hat; aber es handelt sich offenbar um eine hochinteressante partiell-geordnete Menge. Hausdorff hatte 1906 damit begonnen, diese partiell-geordnete Menge $\mathcal{P}$ zu studieren[4]. Er betrachtete maximale linear-geordnete Teilmengen, die er in Anlehnung an die Terminologie Du Bois-Reymonds „Pantachien“ nannte. Hausdorff konnte (unter Verwendung des Wohlordnungssatzes) die Existenz derartiger Pantachien zeigen und ihre Ordnungstypen bestimmen. Er entdeckte dabei eine überraschende Analogie zwischen den Cantorschen insich-dichten linearen Ordnungen und den Pantachien. Eine leichte Modifikation des Beweises von Satz 3.1 führte ihn zu dem folgenden Einschaltungs-Satz (cf. [H 1907a], Teil V, S. 119; [H 1909a], S. 304–305; [H1936b], S. 244):

3.2 Satz (P. Du Bois-Reymond, F. Hausdorff): *Wenn A und B zwei abzählbare Teilmengen einer Pantachie sind mit der Eigenschaft $\forall a \in A\ \ \forall b \in B$: $a < b$, dann gibt es in der Pantachie ein x mit der Eigenschaft: $\forall a \in A\ \forall b \in B : a < x < b$.*

---

[3] Die Bezeichnung soll an das griechische Wort πανταχῆ (an allen Stellen, allerorten) erinnern.

[4] Zwölf Jahre später hat ihn die Graduierung nach dem Endverlauf zur Definition neuer Maßbegriffe und eines neuen Dimensionsbegriffs angeregt (cf. [H 1919a]). Darüber berichten Ch. Brandt, H. Haase, K. Steffen, H. G. Bothe und J. Schmeling in drei ausführlichen Studien, die in dem Sammelband *Felix Hausdorff zum Gedächtnis, Band 1* (E. Brieskorn, Hrsg.), Vieweg Verlag Braunschweig 1996, enthalten sind. S. auch diese Edition, Band IV, S. 21–54.

Unter Verwendung der Kontinuums-Hypothese CH konnte HAUSDORFF zeigen, daß je zwei Pantachien als geordnete Mengen isomorph sind. HAUSDORFF schrieb dazu 1909 in seiner Abhandlung [H 1909a], S. 302:

> Sollte das Kontinuum die zweite Mächtigkeit haben, so wäre damit das Pantachie-Problem völlig entschieden: alle Pantachien haben dann einen gemeinsamen ziemlich einfachen Typus H, der sich zu dem Typus η der rationalen Zahlenmenge analog verhält wie der Typus Ω der zweiten Zahlenklasse zu dem der ersten ω.

HAUSDORFF bezeichnete den Ordnungstyp einer Pantachie also mit H, dem großen griechischen Buchstaben 'Eta'. Aber genauso wie man den Ordnungstyp der endlichen Ordinalzahlen auch mit $\omega = \omega_0$ bezeichnet, und den Ordnungstyp der Klasse aller abzählbaren Ordinalzahlen mit $\Omega = \omega_1$, so verwendete HAUSDORFF bereits 1907 auch die Notation $\eta = \eta_0, H = \eta_1$.

HAUSDORFF konnte ferner zeigen, daß im Gegensatz zur Behauptung von DU BOIS-REYMOND die Pantachien keine Kontinua sind, d. h. daß sie nicht stetig geordnet sind:

3.3 Satz (Lückensatz von F. HAUSDORFF, 1907, 1909) Es gibt eine Pantachie, in der es einen Schnitt (A, B) gibt, wobei A die Konfinalität $\Omega = \omega_1$ und B die Koinitialität $\Omega^* = \omega_1^*$ hat und kein Element x mit $a < x < b$ für $a \in A, b \in B$ existiert.

Diesen Lückensatz bewies HAUSDORFF 1907 zunächst unter Verwendung der Kontinuums-Hypothese CH (es wird allerdings nur $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$ benötigt). Der Beweis verläuft wie folgt: Die Menge aller monotonen reellen Funktionen hat die Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$. Also gilt auch für jede Pantachie P : $\mathrm{Kard}(P) \leq 2^{\aleph_0}$ ($\mathrm{Kard}(P)$ bezeichnet die Kardinalität von P). Wenn P keine (Ω, Ω^*)-Lücken hätte, dann wäre $2^{\aleph_1} \leq \mathrm{Kard}(P)$, also[5] $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$, im Widerspruch zu CH (cf. [H 1907a], S. 128, Satz 3.3). Einen Beweis des Lückensatzes, der nur vom Auswahl-Axiom Gebrauch macht und von der Kontinuums-Hypothese unabhängig ist, fand HAUSDORFF erst 1909 (siehe [H 1909a], S. 320, S. 323). Es handelt sich um einen genial angelegten Beweis, der mit Recht zu den besten Resultaten HAUSDORFFs in der Mengenlehre gezählt wird.

Es ist bemerkenswert, daß hier zum ersten Male in der Geschichte der Mathematik die Elimination der Kontinuums-Hypothese aus einem Beweis gelungen war. Andere berühmte Beispiele sind:

> M. ZORNs Elimination von CH aus dem Beweis eines Satzes von R. BAER aus der Körpertheorie (cf. [Z 1935]) und
>
> G. NÖBELINGs Elimination von CH aus dem Beweis eines Satzes von E. SPECKER über die Freiheit der additiven Gruppe der beschränkten Folgen

[5] Auf diese Gleichung war in einem anderen Zusammenhang auch N. LUSIN 1935 in seiner Arbeit *Sur les ensembles analytiques nuls* (Fund. Math. 25 (1935), 109–131) gestoßen. Man bezeichnet $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$ gelegentlich auch als LUSINsche Hypothese.

ganzer Zahlen (cf. [Noe 1968]). NÖBELINGs Elimination von CH erregte ein solches Aufsehen, daß sie sogar in der *Encyclopedia Britannica – Book of the Year 1970* (Seite 492) besprochen wurde.

Ein weiteres Beispiel wird im Beweis von Satz 6.5 gegeben.

Wenn man CH voraussetzt, dann sind alle Pantachien ordnungs-isomorph und es gilt dann die Aussage, daß alle Pantachien unstetig geordnet sind. HAUSDORFF hat 1907 die Frage gestellt, ob es Pantachien ohne (ω_1, ω_1^*)-Lücken gibt (siehe [H 1907a], S. 151). KURT GÖDEL hat 1970 in einem Essay *Some considerations leading to the probable conclusion that the true power of the continuum is* $\aleph_2$ (in: K. GÖDEL *Collected Works*, Band 3, New York 1995, pp. 420–422; siehe dazu auch die Einführung von ROBERT SOLOVAY, loc. cit. pp. 405–420) die Vermutung ausgesprochen, daß es mit den üblichen Axiomen der Mengenlehre (einschließlich Auswahlaxiom, aber ohne Kontinuumshypothese) widerspruchsfrei sei anzunehmen, daß es stetig geordnete Pantachien gibt, d. h. Pantachien von abzählbaren Folgen reeller Zahlen, in denen es keine (ω_1, ω_1^*)-Lücken gibt und in denen alle Teilmengen höchstens die Konfinalität ω_1 und Koinitialität ω_1^* haben. Diese Vermutung GÖDELs ist bis heute weder bewiesen noch widerlegt (und damit ist auch HAUSDORFFs Frage unbeantwortet), obwohl sie inzwischen weltweit von vielen Mathematikern bearbeitet wurde.

HAUSDORFF hat den Lückensatz 1936 auf die partiell-geordnete Menge

$$P(\omega)/P_{\mathrm{e}}(\omega)$$

übertragen, wenn $P(\omega) \approx 2^{\mathbb{N}}$ die volle Potenzmenge von $\omega = \mathbb{N}$ und $P_{\mathrm{e}}(\omega)$ das Ideal der endlichen Teilmengen von ω ist ([H 1936b]). In der Tat ist $P(\omega)/P_{\mathrm{e}}(\omega)$ sogar eine Boolesche Algebra und alle maximalen linear geordneten Teilmengen sind η_1-Mengen.

Im ausgehenden 20. Jahrhundert haben KRZYSZTOF MAZUR ([Ma 1991]) und STEVO TODORČEVIĆ ([T 1998]) die von HAUSDORFF begonnenen Untersuchungen fortgesetzt und auch für einige andere Ideale I in $P(\omega)$ die Existenz von (Ω, Ω^*)-Lücken in $P(\omega)/I$ bewiesen. Es ist bemerkenswert, daß dabei wieder $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$ vorausgesetzt werden mußte. Einen ausführlichen Überblick über alte und neue Lücken-Sätze gibt MARION SCHEEPERS in [S 1993].

4. Anwendungen der η_1-Mengen in der Topologie

Wegen der STONE-Dualität ist das Studium der Booleschen Algebra $P(\omega)/P_{\mathrm{e}}(\omega)$ mit dem Studium des topologischen Raumes $\beta^*(\omega) = \beta(\omega) - \omega$ äquivalent. Dabei bezeichnet $\beta(\omega)$ die STONE-ČECH-Kompaktifizierung des diskreten Raumes $\omega = \mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen. Die HAUSDORFFschen Resultate, die $P(\omega)/P_{\mathrm{e}}(\omega)$ betreffen, haben daher ein direktes Analogon in der Theorie des Raumes $\beta^*(\omega)$ (vergl. etwa die Abhandlung [En 1972] von RYSZARD ENGELKING). Aber auch die Boolesche Algebra $P(\omega)/P_{\mathrm{e}}(\omega)$ selber und ihre maximalen Ketten mit ihren Lücken spielen eine beachtliche Rolle in der Topologie, denn sie erlauben die

Konstruktion zahlreicher interessanter topologischer Räume. Auf eine derartige Konstruktion wollen wir etwas genauer eingehen.

Ein topologischer HAUSDORFF-Raum R wird *pseudo-normal* genannt,wenn es zu jeder abgeschlossenen Teilmenge $A \subseteq R$ und zu jeder abzählbaren (!) abgeschlossenen Teilmenge $B \subseteq R$ mit $A \cap B = \emptyset$ stets zwei offene disjunkte Mengen U, V gibt mit $A \subseteq U$ und $B \subseteq V$.

Wenn man in dieser Definition die Voraussetzung der Abzählbarkeit von B streicht, dann erhält man das übliche Trennungs-Axiom T_4 von H. TIETZE (1923). HAUSDORFF-Räume, die das Axiom T_4 erfüllen, nennt man seit ALEXANDROFF-URYSOHN 1924 „normal“. Es stellt sich die Frage, ob ein pseudo-normaler HAUSDORFF-Raum, der alle klassischen Abzählbarkeits-Bedingungen erfüllt, normal ist. Daß das nicht so sein muß, hat zuerst MICHAEL WAGE 1975 bewiesen. Einen neuen, sehr viel eleganteren Beweis hat ERIK VAN DOUWEN 1976 gefunden. Unter Anwendung des HAUSDORFFschen Lückensatzes bewies er den folgenden Satz ([D 1977]):

4.1 Satz (E. V. DOUWEN, 1976) Es gibt HAUSDORFF-Räume R, die pseudo-normal aber nicht normal sind, die überdies separabel, abzählbar-parakompakt und lokal-kompakt sind und das erste Abzählbarkeits-Axiom erfüllen.

Den HAUSDORFFschen Lückensatz (in der Version von 1936 für $P(\omega)/P_{\mathrm{e}}(\omega)$) verwendet VAN DOUWEN in der folgenden Formulierung:

4.2 Lückensatz (F. HAUSDORFF, 1936) Es gibt zwei ein-eindeutige Abbildungen F und G von ω_1 in die Potenzmenge von $\omega = \mathbb{N}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) Für alle $\alpha \in \omega_1$ und alle $\beta \in \omega_1$ mit $\alpha < \beta$ gilt: $F(\alpha) - F(\beta), G(\alpha) - G(\beta)$ und $F(\alpha) \cap G(\alpha)$ sind endlich, aber $F(\beta) - F(\alpha)$ und $G(\beta) - G(\alpha)$ sind unendlich,

(ii) Für alle $\beta \in \omega_1$ und alle $n \in \omega$ ist $\{\alpha; \alpha < \beta \,\&\, G(\alpha) \cap F(\beta) \subseteq n\}$ endlich,

(iii) Es gibt keine Teilmenge $A \subseteq \omega$ derart, daß für jedes $\alpha \in \omega_1$ sowohl $G(\alpha) \cap A$ als auch $F(\alpha) - A$ endlich ist.

Für $X \subseteq \omega$ sei $[X] = \{Y \subseteq \omega;\ (X - Y) \cup (Y - X) \text{ ist endlich}\}$; man setzt ferner noch $[X] < [Y] \Leftrightarrow X - Y$ ist endlich und $Y - X$ ist unendlich. Nach 4.2 bilden dann die Klassen $[F(\alpha)]$ eine strikt aufsteigende Folge und die $[\omega - G(\alpha)]$ eine strikt absteigende Folge, die aufeinander zu laufen, aber kein Element zwischen sich haben.

Beweis-Skizze für Satz 4.1. VAN DOUWEN betrachtet den Raum

$$R = \omega \cup \{f_\alpha;\ \alpha \in \omega_1\} \cup \{g_\alpha;\ \alpha \in \omega_1\},$$

wobei die Elemente f_α und g_α paarweise verschieden sein sollen und nicht zu ω gehören sollen. Eine Teilmenge W von R soll „offen“ sein, falls (unter Verwendung der Notation aus 4.2)

(1) sowohl $\{\alpha;\ f_\alpha \in W\}$ als auch $\{\alpha;\ g_\alpha \in W\}$ 'offene' Teilmengen von ω_1 sind, d. h. falls für ihre Komplemente K gilt:

$$\forall\alpha \in \omega_1 :\ \alpha \cap K \neq \emptyset \Rightarrow \bigcup(\alpha \cap K) \in K,$$

(2) wenn $f_0 \in W$, dann soll $F(0) - W$ endlich sein, und wenn $f_\alpha \in W$ für $1 \leq \alpha < \omega_1$, dann soll ein $\beta \in \alpha$ derart existieren, daß $(F(\alpha) - F(\beta)) - W$ endlich ist,

(3) wenn $g_0 \in W$, dann soll $G(0) - W$ endlich sein, und wenn $g_\alpha \in W$ für $1 \leq \alpha < \omega_1$, dann soll ein $\beta \in \alpha$ existieren so, daß $(G(\alpha) - G(\beta)) - W$ endlich ist.

Der so definierte topologische Raum ist nicht normal, weil aufgrund des Lückensatzes die beiden disjunkten abgeschlossenen Mengen $\{f_\alpha;\ \alpha \in \omega_1\}$ und $\{g_\alpha;\ \alpha \in \omega_1\}$ nicht durch offene Teilmengen getrennt werden können.

Mit einem ähnlich konstruierten Raum

$$R = \omega^2 \cup \{f_\alpha;\ \alpha \in \omega_1\} \cup \{g_\alpha;\ \alpha \in \omega_1\}$$

hat Mary Ellen Rudin ein Beispiel für einen regulären, abzählbar-parakompakten, separablen Raum gegeben, der auch das erste Abzählbarkeits-Axiom erfüllt, aber nicht normal ist. Solche Räume werden „anti-Dowker-Räume" genannt (siehe den Artikel von M. E. Rudin in [KuV 1984], S. 761–780, dort S. 777).

Hausdorff selber gab 1936 eine Anwendung des Lückensatzes in der Deskriptiven Mengenlehre. Er bewies in [H 1936b] den folgenden Satz:

4.3 Satz (F. Hausdorff, 1936) Jeder separable, vollständige, überabzählbare Hausdorff-Raum R kann als Union einer aufsteigenden Folge von $\aleph_1$ paarweise verschiedenen G_δ-Mengen $X_\alpha (\alpha \in \omega_1)$ dargestellt werden.

Zum Beweis betrachtet Hausdorff zunächst den Raum $P(\omega) \approx 2^\omega$, dessen Topologie durch die Baireschen Intervalle $I_{n,E} = \{X \subseteq \omega; X \cap n = E\}$ (für $E \subseteq n \in \omega$, wobei $n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$) gegeben ist. Die $I_{n,E}$ bilden also eine Basis für das System aller offenen Mengen. Für zwei Mengen $A, B \subseteq \omega$ und eine natürliche Zahl $n \in \omega$ sind dann

$$D_n(A, B) = \{X \subseteq \omega; A \cap \{n\} \subseteq X \cap \{n\} \subseteq B \cap \{n\}\},$$

$$D^n(A, B) = \bigcap_{k\in\omega} D_{n+k}(A, B) = \{X \subseteq \omega; A \cap [n, \to [\subseteq X \cap [n, \to [\subseteq B \cap [n, \to [\}$$

abgeschlossene Teilmengen und unter Verwendung der Notation aus dem Lückensatz 4.2 ergibt sich, daß (für $\alpha \in \omega_1$) die Intervalle

$$I(\alpha) = \bigcup_{n\in\omega} D^n(F(\alpha), \omega - G(\alpha)) = \{X \subseteq \omega; [F(\alpha)] \leq [X] \leq [\omega - G(\alpha)]\}$$

F_σ-Mengen sind. Nach dem Lückensatz ist ihr Schnitt leer. Die Komplemente sind paarweise verschiedene G_δ-Mengen und ihre Union ist ganz $P(\omega)$. Dieser

Raum $P(\omega)$ ist aber als kompakte, und daher abgeschlossene, Teilmenge in jedem separablen, vollständigen T_2-Raum R enthalten. Daraus folgt dann sofort die Behauptung.

Wir bemerken noch, daß Satz 4.3 im Falle des Raumes $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen zuerst von Wacław Sierpiński auf ganz anderem Wege bewiesen worden ist ([Si 1933]).

5. Die Hausdorffschen η_α-Mengen

Ist es möglich, weitere Analoga zu den Ordnungstypen η und H in höheren Mächtigkeiten zu konstruieren? Ist es möglich, für jede unendliche Kardinalzahl $\aleph_\alpha$ eine linear geordnete Menge $\langle M, \leq \rangle$ mit der folgenden Eigenschaft zu konstruieren:

(*) Für je zwei Teilmengen $A, B \subseteq M$ mit Kard$(A) < \aleph_\alpha$, Kard(B)$< \aleph_\alpha$ und $\forall a \in A \;\; \forall b \in B : a < b$ gibt es $x \in M$ mit $\forall a \in A \;\; \forall b \in B : a < x < b$.

Linear geordnete Mengen mit dieser Eigenschaft nannte Hausdorff η_α-Mengen. Die Menge der rationalen Zahlen ist dann eine η_0-Menge und die Pantachien sind η_1-Mengen. Die Existenz von η_α-Mengen ist leicht zu zeigen. Das eigentliche Problem dabei ist, ob es η_α-Mengen der kleinstmöglichen Kardinalität $\aleph_\alpha$ gibt und ob sie bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt sind. Unter Verwendung der Generalisierten Kontinuums-Hypothese (GCH) konnte Hausdorff im Falle von Nachfolger-Kardinalzahlen die positive Antwort geben. Mit der Methode der Partialprodukte[6] vom Grade α gelang ihm die Konstruktion dieser Mengen.

Für eine kardinale Anfangszahl ω_α sei $A(\omega_\alpha)$ die Menge aller Abbildungen von $\{\beta;\; \beta < \omega_\alpha\}$ in die drei-elementige Menge $\{0, 1, 2\}$ (oder $\{l, m, n\}$, mit $l < m < n$, wie Hausdorff schreibt, wobei m irgendein „mittleres“ Element sein soll). Hausdorff zeigt, daß die lexikographisch geordnete Menge

$$W(\omega_\alpha) = \{\varphi \in A(\omega_\alpha); \exists \gamma < \omega_\alpha \; \forall \nu (\gamma < \nu < \omega_\alpha \Rightarrow \varphi(\nu) = m)\}$$

im Falle $\alpha = \beta + 1$ eine η_α-Menge der Mächtigkeit $2^{\aleph_\beta}$ ist. Insgesamt bewies Hausdorff den folgenden Satz (er findet sich in den *Grundzügen der Mengenlehre* auf den Seiten 181–183).

5.1 Satz (F. Hausdorff, 1907) Sei α eine beliebige Ordinalzahl, $\alpha \geq 0$.

(i) Jede linear geordnete Menge einer Kardinalität $\leq \aleph_\alpha$ kann ordnungstreu in jede η_α-Menge eingebettet werden.

(ii) Jede η_α-Menge hat eine mit $W(\omega_\alpha)$ isomorphe Teilmenge.

(iii) Je zwei η_α-Mengen der Kardinalität $\aleph_\alpha$ sind ordnungsisomorph.

(iv) Wenn $\aleph_\alpha$ singulär ist, dann sind η_α-Mengen sogar $\eta_{\alpha+1}$-Mengen.

[6] S. Anm. [49], dieser Band. S. 605.

(v) $\eta_{\alpha+1}$-Mengen haben stets eine Mächtigkeit $\geq 2^{\aleph_\alpha}$.

(vi) Es gibt eine $\eta_{\alpha+1}$-Menge der Kardinalität $2^{\aleph_\alpha}$, beispielsweise $W(\omega_\alpha)$.

(vii) Es gibt eine $\eta_{\alpha+1}$-Menge der Kardinalität $\aleph_{\alpha+1}$ genau dann wenn $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.

Der Beweis von (iii) wird mit der Zick-Zack-Methode geführt. Satz 5.1 gibt eine umfassende Antwort auf die Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit von η_α-Mengen, sofern α eine Nachfolger-Ordinalzahl ist, $\alpha = \beta + 1$, oder $\alpha = 0$. Im Falle singulärer Kardinalzahlen $\aleph_\alpha$ folgt aus (iv) und (v) die Existenz einer η_α-Menge der Kardinalität $2^{\aleph_{\alpha+1}}$. Im Falle regulärer Kardinalzahlen $\aleph_\alpha$ mit Limeszahlindex α macht der Satz keine Aussage. Reguläre Kardinalzahlen $\aleph_\alpha$ mit Limeszahlindex α sind, wie HAUSDORFF 1908 an anderem Ort bemerkt hatte, Kardinalzahlen von „exorbitanter Größe“. Solche Zahlen werden heute „schwach-unerreichbare Kardinalzahlen“ genannt (siehe die Anm. [44] zu HAUSDORFFS *Grundzügen*, dieser Band, S. 600). SIERPIŃSKI hat 1949 den Beweis von HAUSDORFF etwas vereinfacht und insbesondere gezeigt, daß man statt der drei-elementigen Basis-Menge $\{l, m, n\}$ genauso gut eine zwei-elementige Menge, etwa $2 = \{0, 1\}$, nehmen kann ([Si 1949]). SIERPIŃSKI bewies, daß die lexikographisch geordnete Menge

$$H(\omega_\alpha) = \{\varphi \in 2^{\omega_\alpha};\ \exists\gamma < \omega_\alpha :\ \varphi(\gamma) = 1\ \&\ \forall\nu(\gamma < \nu < \omega_\alpha \Rightarrow \varphi(\nu) = 0)\}$$

im Falle $\alpha = \beta + 1$ eine η_α-Menge der Mächtigkeit $2^{\aleph_\beta}$ ist. EGBERT HARZHEIM bewies 1964, daß die Mengen $W(\omega_\alpha)$ und $H(\omega_\alpha)$ für $\alpha \geq 0$ stets isomorph sind ([Harz 1964]).

Wenn $\aleph_\alpha$ regulär ist, dann ist ferner jede Teilmenge von $H(\omega_\alpha)$, die ebenfalls eine η_α-Menge ist, mit $H(\omega_\alpha)$ isomorph. LEONARD GILLMAN konnte den HAUSDORFFschen Satz 1956 wie folgt ergänzen ([G 1956]):

5.2 Satz (L. GILLMAN, 1956) Sei α eine beliebige Ordinalzahl, $\alpha \geq 0$.

(viii) Wenn $2^{\aleph_\alpha} \neq \aleph_{\alpha+1}$, dann gibt es zwei nicht-isomorphe $\eta_{\alpha+1}$-Mengen der Kardinalität $2^{\aleph_\alpha}$.

(ix) Wenn $\aleph_\alpha$ eine schwach-unerreichbare Kardinalzahl ist, dann gibt es eine η_α-Menge der Kardinalität $\aleph_\alpha$ genau dann wenn $\aleph_\alpha$ stark-unerreichbar ist.

Man kann jetzt die Aussagen (vii) und (ix) aus den Sätzen 5.1 und 5.2 zusammenfassen und erhält den folgenden abschließenden Satz:

5.3 Satz (F. HAUSDORFF, L. GILLMAN) Sei α eine beliebige Ordinalzahl, $\alpha \geq 0$. Es gibt eine η_α-Menge der Kardinalität $\aleph_\alpha$ genau dann, wenn $\aleph_\alpha$ regulär ist und $\forall\beta(\beta < \alpha \Rightarrow 2^{\aleph_\beta} \leq \aleph_\alpha)$ gilt.

Wenn es keine η_1-Menge der Kardinalität $\aleph_1$ geben sollte, dann stellt sich die naheliegende Frage, ob es denn η_1-Mengen der Kardinalität $\aleph_2$ oder vielleicht der Kardinalität $\aleph_\omega$ gibt, etc. Es ist seit langer Zeit bekannt, daß die möglichen Kardinalitäten von η_1-Mengen gewissen Einschränkungen unterliegen. Es gilt ganz allgemein, daß die Kardinalzahl einer η_1-Menge stets die Form $\kappa^{\aleph_0}$ hat, wobei κ eine geeignete Kardinalzahl ist. MIKHAIL ANTONOVSKI, DAVID und GREGOR CHUDNOWSKI und EDWIN HEWITT haben in ihrer Abhandlung [ACH 1981] diesen Satz wie folgt verallgemeinert (dabei bezeichnet $\mu^{<\aleph_\alpha}$ die „schwache Potenz", also

$$\mu^{<\aleph_\alpha} = \sum_{\beta<\alpha} \mu^{\aleph_\beta} = \operatorname{Sup}\{\mu^{\aleph_\beta};\ \beta \in \alpha\}) :$$

5.4 Satz (M. ANTONOVSKIJ, D. CHUDNOVSKY, G. CHUDNOVSKY, E. HEWITT, 1981): Wenn M eine η_α-Menge der Kardinalität μ ist, dann gilt $\mu = \mu^{<\aleph_\alpha}$.

Satz 5.1 (vi) liefert eine Mächtigkeitsabschätzung für beliebige linear geordnete Mengen, die PAUL URYSOHN (in [U 1923/1924]) HAUSDORFF zugeschrieben hat. Diese Mächtigkeitsabschätzung ist insofern bemerkenswert, weil in der (klassischen) Mengenlehre nicht gesagt werden kann, welchen Wert $2^{\aleph_\alpha}$ oberhalb von $\aleph_{\alpha+1}$ annimmt.

5.5 Satz (F. HAUSDORFF, P. URYSOHN, 1924) Sei $\langle M, \leq\rangle$ eine beliebige linear geordnete Menge. Wenn weder $\omega_{\alpha+1}$ noch $\omega^*_{\alpha+1}$ ordnungstreu in M einbettbar ist, dann gilt $\operatorname{Kard}(M) \leq 2^{\aleph_\alpha}$.

Beweis: Sei $\mu = \operatorname{Kard}(M)$ und $M = \{m_\alpha;\ \alpha \in \mu\}$. Wir definieren durch transfinite Rekursion eine Einbettung F von M in die HAUSDORFFsche $\eta_{\alpha+1}$-Menge $W(\omega_{\alpha+1})$ wie folgt: Sei $F(m_0)$ ein beliebiges Element von $W(\omega_{\alpha+1})$. Wenn $\delta \in \mu$ und $F(\alpha)$ für alle $\alpha \in \delta$ bereits definiert ist, dann sei A_δ eine wohlgeordnete konfinale Teilmenge von $\{m_\alpha;\ \alpha \in \delta\ \&\ m_\alpha < m_\delta\}$ und B_δ eine invers-wohlgeordnete koinitiale Teilmenge von $\{m_\alpha;\ \alpha \in \delta\ \&\ m_\delta < m_\alpha\}$, jeweils von kleinstmöglicher Mächtigkeit. Nach Voraussetzung gilt $\operatorname{Kard}(A_\delta) \leq \aleph_\alpha$ und $\operatorname{Kard}(B_\delta) \leq \aleph_\alpha$. Es gibt also ein $d \in W(\omega_{\alpha+1})$ mit $F(a) < d < F(b)$ für alle $a \in A_\delta$, $b \in B_\delta$ und wir können $F(\delta) = d$ setzen. Nach Satz 5.1(vi) gilt schließlich: $\operatorname{Kard}(M) \leq \operatorname{Kard}(W(\omega_{\alpha+1})) = 2^{\aleph_\alpha}$.

Wir haben den kurzen Beweis von Satz 5.5 gebracht, weil er in besonders eindrucksvoller Weise die Bedeutung der von HAUSDORFF geprägten Begriffe des Element- und des Lücken-Charakters sichtbar macht (siehe HAUSDORFFs *Grundzüge der Mengenlehre*, Seite 142 ff). Nicht die Mächtigkeiten der beiden Schnitt-Mengen $\{m_\alpha;\ \alpha \in \delta\ \&\ m_\alpha < m_\delta\}$ und $\{m_\alpha;\ \alpha \in \delta\ \&\ m_\delta < m_\alpha\}$ sind relevant, sondern nur ihre Konfinalität, bzw. Koinitialität.

Einen neuen Beweis von Satz 5.5 hat TODORČEVIĆ unter Verwendung von 'Partitions-Bäumen linear geordneter Mengen' in seinem Artikel *Trees and Linearly Ordered Sets* gegeben (siehe [KuV 1984], S. 235–293, dort S. 249). Ich möchte hier einen weiteren Beweis geben.

Ein weiterer **Beweis von Satz 5.5**: Sei $\langle M, < \rangle$ eine beliebige linear geordnete Menge, deren Kardinalität $> 2^{\aleph_\alpha}$ ist, also $\mathrm{Kard}(M) \geq (2^{\aleph_\alpha})^+$. Sei $\lhd$ eine beliebige Wohlordnung von M. Wir betrachten die folgende Partition von $\mathsf{P}_2(M) = \{X;\ X \subseteq M \ \&\ \mathrm{Kard}(X) = 2\}$:

$$A_0 = \{\{x, y\} \in \mathsf{P}_2(M);\ x \lhd y \Leftrightarrow x < y\},$$
$$A_1 = \{\{x, y\} \in \mathsf{P}_2(M);\ x \lhd y \Leftrightarrow y < x\}.$$

Die von PAUL ERDÖS 1942 bewiesene Partitions-Relation $(2^\kappa)^+ \to (\kappa^+)^2_\kappa$ liefert die Existenz einer homogenen Menge H der Kardinalität $\aleph_{\alpha+1}$. Wenn dabei $\mathsf{P}_2(H) \subseteq A_0$ gilt, dann stimmen die beiden linearen Ordnungen $<$ und $\lhd$ auf H überein, und folglich ist H auch bezüglich $<$ wohlgeordnet vom Typ $\omega_{\alpha+1}$. Wenn jedoch $\mathsf{P}_2(H) \subseteq A_1$ gilt, dann folgt analog, daß H in Bezug auf die lineare Ordnung $<$ invers-wohlgeordnet vom Typ $\omega^*_{\alpha+1}$ ist.

Wenn $\langle M, \leq \rangle$ eine abzählbare linear-geordnete Menge ist, dann ist offenbar ω_0 oder ω_0^* ordnungstreu in M einbettbar. PAUL ERDÖS, ALFRED TARSKI, WILLIAM HANF, DONALD MONK und DANA SCOTT haben in den Jahren 1961–1964 die Frage untersucht, für welche überabzählbaren Kardinalzahlen κ der analoge Sachverhalt gilt, daß jede linear-geordnete Menge $\langle M, \leq \rangle$ der Mächtigkeit κ entweder eine wohlgeordnete Teilmenge vom Ordungstyp κ oder eine Teilmenge vom invers-geordneten Ordnungstyp κ^* enthält. Sie fanden, daß dies genau die sogenannten „schwach-kompakten“ Kardinalzahlen sind. Solche Kardinalzahlen sind stark-unerreichbar. Auf diese „unerreichbaren Kardinalzahlen“ war HAUSDORFF 1908 in einem anderen Zusammenhang gestoßen. Er bezeichnete sie als „exorbitant große Kardinalzahlen“.

HARZHEIM bewies in [Harz 1965] die folgende Verschärfung von Satz 5.5: Wenn M eine linear-geordnete Menge ist, in die weder $\omega_{\alpha+1}$ noch ω^*_α einbettbar ist, dann ist M in jede η_α-Menge einbettbar.

6. η_α-Gruppen und η_α-Körper

Die HAUSDORFFsche Konstruktion der η_α-Mengen führte ein halbes Jahrhundert später zu einer bedeutenden Entdeckung in der Algebra, nämlich einem Analogon zum STEINITZschen Isomorphie-Satz (Satz 2.1) in der Theorie der formal-reellen Körper.

Zusammen mit der Addition ist die geordnete Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen eine geordnete abelsche Gruppe und $\langle \mathbb{Q}, +, \leq, 0 \rangle$ ist somit ein Beispiel einer abelschen η_0-Gruppe. Wenn wir auch die Multiplikation in Betracht ziehen, dann ist $\langle \mathbb{Q}, +, \cdot, \leq, 0, 1 \rangle$ ein Beispiel eines η_0-Körpers. Es stellt sich jetzt die Frage, ob es auch η_α-Gruppen und η_α-Körper für beliebige Ordinalzahlen $\alpha \geq 1$ gibt. Diese Frage hatte schon HAUSDORFF 1907 ([H 1907a], S. 141) gestellt, aber nicht beantworten können.

Es ist heute verhältnismäßig leicht, η_1-Gruppen und η_1-Körper zu konstruieren. Wenn F ein freier Ultrafilter auf der Menge $\omega = \mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist, dann ist die Ultrapotenz $\mathbb{Q}^\omega/F$ eine η_1-Gruppe (und als Körper aufgefaßt auch ein η_1-Körper) der Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$. Wenn man diese Konstruktion auf höhere Mächtigkeiten ausdehnen will, dann benötigt man sogenannte „gute“ Ultrafilter und den Begriff der „saturierten Struktur“. Man kann η_α-Gruppen und η_α-Körper aber auch unter Verwendung von HAHNschen Produkten erhalten (vergl. HAUSDORFFS *Grundzüge der Mengenlehre*, S. 199–200 zum Begriff des HAHNschen Produktes). Das haben zuerst NORMAN L. ALLING ([A 1962]) und PAULO RIBENBOIM 1965 ausgearbeitet (siehe dazu auch S. PRIESS-CRAMPE [Pr 1983]).

Für eine beliebige Menge M sei $\mathbb{R}^M$ die Menge aller Abbildungen von M in den Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Für eine Abbildung $f \in \mathbb{R}^M$ sei $\mathrm{Supp}(f) = \{a \in M;\ f(a) \neq 0\}$ der Träger (oder Support) von f. Wenn M linear geordnet ist, dann ist

$$\mathcal{H}(M) = \{f \in \mathbb{R}^M;\ \mathrm{Supp}(f) \text{ ist wohlgeordnet}\}$$

die HAHNsche Gruppe über der linearen Ordnung M (Die Wohlgeordnetheit von $\mathrm{Supp}(f)$ bezieht sich dabei auf die lineare Ordnung von M). Die Addition ist komponentenweise erklärt. Ein Element von $\mathcal{H}(M)$ ist „positiv“, wenn $f(\mathrm{Min}(\mathrm{Supp}(f))) > 0$ ist, wobei $\mathrm{Min}(X)$ das Minimum von X ist. $\mathcal{H}(M)$ trägt demnach die lexikographische Ordnung, die $\mathcal{H}(M)$ zu einer linear geordneten Menge macht. Es gelten dann die folgenden Sätze, wobei in 6.1 für die Mächtigkeit der η_α-Gruppe $\mathcal{H}(M)$ lediglich die Abschätzung $\mathrm{Kard}(\mathcal{H}(M)) \leq 2^{\mathrm{Kard}(M)}$ gilt:

6.1 Satz: Für jede η_α-Menge M ist $\mathcal{H}(M)$ eine η_α-Gruppe.

6.2 Satz (N. ALLING, P. RIBENBOIM, 1962/1965): Sei $\aleph_\alpha$ regulär, $\alpha \neq 0$ mit der Eigenschaft $\forall\beta \in \alpha:\ 2^{\aleph_\beta} \leq \aleph_\alpha$. Sei M eine η_α-Menge der Kardinalität $\aleph_\alpha$. Dann ist

$$\mathcal{H}(M)_\alpha = \{f \in \mathbb{R}^M;\ \mathrm{Supp}(f) \text{ ist wohlgeordnet \& } \mathrm{Kard}(\mathrm{Supp}(f)) < \aleph_\alpha\}$$

eine η_α-Gruppe der Kardinalität $\aleph_\alpha$

Die Existenz von η_α-Körpern kann man auf ähnliche Weise zeigen. Wenn G_α eine multiplikativ geschriebene abelsche η_α-Gruppe ist, dann ist der Körper $H(G_\alpha, \mathbb{R})$ der formalen Potenzreihen auf G_α über $\mathbb{R}$ ein η_α-Körper,

$$H(G_\alpha, \mathbb{R}) = \{f \in \mathbb{R}^{G_\alpha};\ \ \mathrm{Supp}(f) \text{ ist wohlgeordnet}\}.$$

Daß diese von HANS HAHN eingeführten formalen Potenzreihen einen Körper bilden, hat HAUSDORFF in seinen *Grundzügen der Mengenlehre* im Abschnitt über „Komplexe reeller Zahlen“ auf den Seiten 206–209 vollständig ausgeführt. Die Multiplikation ist dabei die sogenannte „Faltung“: $f \cdot g = h$, wobei h wie folgt definiert ist: $h(\gamma)$ ist (in $\mathbb{R}$) die endliche (!) Summe aller Terme $f(\alpha)g(\beta)$, für die $\alpha\beta = \gamma$ gilt. Wenn G_α eine η_α-Gruppe der Kardinalität $\aleph_\alpha$ ist und $\aleph_\alpha$

regulär ist, dann ist (nach ALLING, 1962) der Unterkörper

$$H(G_\alpha, \mathbb{R})_\alpha = \{f \in H(G_\alpha, \mathbb{R}); \mathrm{Kard}(\mathrm{Supp}(f)) < \aleph_\alpha\}$$

ein η_α-Körper der Kardinalität $\aleph_\alpha$. Wenn G_α radizibel ist, dann ist $H(G_\alpha, \mathbb{R})_\alpha$ ein reell-abgeschlossener Körper.

Unter Voraussetzung von GCH sind die η_α-Mengen G_α und $H(G_\alpha, \mathbb{R})_\alpha$ nach Satz 5.1 (ii) als geordnete Mengen (!) isomorph. Wenn man GCH nicht voraussetzen will, dann ist gar nicht klar, ob überhaupt jede η_α-Menge der Ordnungstyp eines η_α-Körpers ist. Eine Antwort gibt der folgende Satz:

6.3 Satz (M. ANTONOVSKIJ, D. CHUDNOVSKY, G. CHUDNOVSKY, E. HEWITT, 1981) Es gibt ein Modell der Mengenlehre (mit Auswahlaxiom), in dem $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1} = \aleph_2$ gilt und in dem die SIERPIŃSKIsche η_1-Menge $H(\omega_1)$ nicht der Ordnungstyp eines η_1-Körpers ist ([ACH 1981]).

Wir können jetzt den angekündigten Satz mitteilen, der ein Analogon des STEINITZschen Isomorphiesatzes (Satz 2.1) in der Theorie der formal-reellen Körper darstellt.

6.4 Satz (P. ERDÖS, L. GILLMAN, M. HENRIKSEN, 1955): Je zwei überabzählbare, reell-abgeschlossene η_α-Körper der Kardinalität $\aleph_\alpha$ sind isomorph ([ErGH 1955]).

Beweis. Wenn K_1 und K_2 zwei reell-abgeschlossene η_α-Körper derselben überabzählbaren Mächtigkeit $\aleph_\alpha$ sind, dann haben sie gleichmächtige Transzendenzbasen T_i über ihrem Primkörper $\mathbb{Q}$, welche η_α-Mengen der Kardinalität $\aleph_\alpha$ sind. Offenbar liegt T_i dicht in K_i. Mit einem Zick-Zack-Argument konstruiert man jetzt zwei aufsteigende stetige Folgen von reell-abgeschlossenen Unterkörpern $L_\nu \subseteq K_1$ und $M_\nu \subseteq K_2$, $L_\nu \simeq M_\nu$, $\mathrm{Kard}(L_\nu) < \aleph_\alpha$ (für $\nu \in \aleph_\alpha$) und $L_0 \simeq M_0 \simeq \overline{\mathbb{Q}}$, wobei $\overline{\mathbb{Q}}$ der reelle Abschluß von $\mathbb{Q}$ ist. Es soll

$$K_1 = \bigcup\{L_\nu;\ \nu \in \aleph_\alpha\} \text{ und } K_2 = \bigcup\{M_\nu;\ \nu \in \aleph_\alpha\}$$

gelten. Zur Rekursion sei angenommen, daß L_ν und M_ν bereits konstruiert sind und f_ν ein Isomorphismus von L_ν auf M_ν ist. Wenn ν eine gerade Ordinalzahl ist, dann sei d das erste Element von T_1 (in einer fest gewählten transfiniten Aufzählung von T_1), das nicht in L_ν liegt. Dann zerlegt d die Menge L_ν in zwei Klassen, $A = \{x \in L_\nu;\ x < d\}$ und $B = \{x \in L_\nu;\ d < x\}$. Man wählt jetzt in der η_α-Menge T_2 ein Element e mit $f_\nu(a) < e < f_\nu(b)$ für alle $a \in A$, $b \in B$. Sei $L_{\nu+1}$ der reelle Abschluß (in K_1) von $L_\nu \cup \{d\}$ und sei $M_{\nu+1}$ der reelle Abschluß (in K_2) von $M_\nu \cup \{e\}$. Nach Wahl von d und e kann f_ν zu einem Isomorphismus $f_{\nu+1}$ von $L_{\nu+1}$ auf $M_{\nu+1}$ fortgesetzt werden. $f_{\nu+1}$ ist durch $f_\nu \subseteq f_{\nu+1}$ und $f_{\nu+1}(d) = e$ eindeutig bestimmt. Wenn ν ungerade ist, wechselt man die Seiten. Dann ist $f = \bigcup\{f_\nu;\ \nu \in \aleph_\alpha\}$ der gesuchte Isomorphismus.

Satz 6.4 hat viele interessante Konsequenzen. Es folgt beispielsweise sofort die Vollständigkeit und Entscheidbarkeit der Theorie der reell-abgeschlossenen

Körper. TARSKI hatte das ursprünglich auf einem ganz anderen Wege bewiesen, nämlich unter Angabe eines Verfahrens der Quantoren-Elimination.

6.5 Satz (A. TARSKI, 1947)

(i) Je zwei reell-abgeschlossene Körper sind elementar-äquivalent.

(ii) Die Theorie (der 1. Stufe) des Körpers $\langle \mathbb{R}, +, -, \cdot, ^{-1}, \leq \rangle$ ist entscheidbar.

Beweis-Skizze. Zu (i): Sei K ein beliebiger reell-abgeschlossener Körper und (nach dem Satz von LÖWENHEIM-SKOLEM) A eine abzählbare elementare Substruktur von K. Wenn F ein freier Ultrafilter auf ω ist, dann sind die Ultrapotenzen A^ω/F und $\mathbb{R}^\omega/F$ offenbar η_1-Körper. Unter der Annahme der Kontinuums-Hypothese CH ist ihre Kardinalität $\aleph_1$ und der Satz von ERDÖS-GILLMAN-HENRIKSEN liefert ihre Isomorphie. Also sind auch K und $\mathbb{R}$ elementar-äquivalent. Das übliche Axiomensystem für reell-abgeschlossene Körper ist also vollständig. Man kann jetzt den Formalismus der Theorie der reell-abgeschlossenen Körper „gödelisieren“ und die Aussage der Vollständigkeit in einer zahlentheoretischen Aussage Φ kodieren. Nach dem oben gegebenen Argument ist Φ in $\mathsf{ZSF} + \mathsf{CH}$ beweisbar[7]. Nach einer Bemerkung von GEORG KREISEL ist Φ dann aber bereits in ZSF beweisbar (vergl. dazu [F 1971], S. 41).

Zu (ii): Die Theorie des Körpers der reellen Zahlen ist rekursiv axiomatisierbar (die Menge aller Gödelzahlen von wahren Aussagen also rekursiv-aufzählbar). Sie ist nach (i) auch vollständig und daher rekursiv, also entscheidbar.

Satz 6.5 hat viele interessante und wichtige Anwendungen. Als Beispiel erwähnen wir den Satz, daß es endlich-dimensionale nicht-assoziative Divisions-Algebren über reell-abgeschlossenen Körpern K nur in den Dimensionen $1, 2, 4$ und 8 gibt. Kommutative endlich-dimensionale nicht-assoziative Divisions-Algebren über reell-abgeschlossenen Körpern K gibt es nur in den Dimensionen 1 und 2.

Diese Aussagen wurden ursprünglich von H. HOPF (1940), R. BOTT, J. MILNOR und M. KERVAIRE (1958) mit tiefliegenden topologischen Methoden nur für den Körper $K = \mathbb{R}$ der reellen Zahlen bewiesen. Da die Aussage über die Dimension in der Logik der 1. Stufe ausgedrückt werden kann, überträgt sie sich nach Satz 6.5 (i) auf alle reell-abgeschlossenen Körper (vergl. dazu [J 1964], Band 3, S. 314–316).

7. Universell-homogene Modelle

Der große Erfolg der HAUSDORFFschen Theorie der linear-geordneten η_α-Mengen führte zu der Frage, ob nicht auch für andere Klassen $\mathbf{K}$ von Strukturen analoge Begriffe geprägt werden können. Zunächst springt die Eigenschaft der Einbettbarkeit aus Satz 5.1 (i) ins Auge, die wie folgt verallgemeinert werden

[7] Mit ZSF bezeichnen wir die ZERMELO-SKOLEM-FRAENKELsche Mengenlehre (ohne Auswahlaxiom), die in der Literatur auch unter der Bezeichnung ZF bekannt ist.

kann.

Definition (Bjarni Jónsson, 1956). Sei $\mathbf{K}$ eine Klasse von Strukuren derselben Signatur und sei α eine beliebige Ordinalzahl, $\alpha \geq 0$. Eine Struktur $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ aus $\mathbf{K}$ heißt $\aleph_\alpha$-universell (genauer: $(\aleph_\alpha, \mathbf{K})$-universell), falls jede Struktur $\mathfrak{B}$ aus $\mathbf{K}$, deren Mächtigkeit $\leq \aleph_\alpha$ ist, mit einer Substruktur von $\mathfrak{A}$ isomorph ist.

Nach Satz 5.1 und Satz 5.3 gibt es in der Klasse $\mathbf{K}_{LM}$ aller linear-geordneten Mengen für jede reguläre Kardinalzahl $\aleph_\alpha$ eine $\aleph_\alpha$-universelle lineare Ordnung der Mächtigkeit $\aleph_\alpha$, vorausgesetzt es gilt $\forall\beta(\beta < \alpha \Rightarrow 2^{\aleph_\beta} \leq \aleph_\alpha)$. Der Frage, ob es auch in der Klasse aller partiell geordneten Mengen $\aleph_\alpha$-universelle partielle Ordnungen gibt, war zuerst Andrzej Mostowski (1938) nachgegangen. Er bewies (in [Mos 1938], auf der Grundlage der üblichen Zermelo-Skolem-Fraenkelschen Mengenlehre ZSF) die Existenz einer abzählbaren $\aleph_0$-universellen partiellen Ordnung. Jónsson ([Jo 1956]) konnte auf der Grundlage von ZSF + GCH zeigen, daß auch für jede überabzählbare Kardinalzahl $\aleph_\alpha$ eine $\aleph_\alpha$-universelle partiell geordnete Menge der Mächtigkeit $\aleph_\alpha$ existiert. Jónsson bewies den sehr viel allgemeineren Satz 7.1 unter Verwendung der folgenden Begriffe.

Definition. Sei $\mathbf{K}$ eine Klasse von Strukturen derselben Signatur.

(i) $\mathbf{K}$ hat die „gemeinsame Einbettungs-Eigenschaft“, wenn je zwei Strukturen aus $\mathbf{K}$ bis auf Isomorphie in einer Struktur aus $\mathbf{K}$ enthalten sind.

(ii) $\mathbf{K}$ hat die Amalgamierungs-Eigenschaft, wenn zu beliebigen Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ aus $\mathbf{K}$ und Einbettungen $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ und $g : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ stets eine weitere Struktur $\mathfrak{D} \in \mathbf{K}$ existiert und Einbettungen $F : \mathfrak{B} \to \mathfrak{D}$ und $G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ so daß $F \circ f = G \circ g$.

7.1 Satz (B. Jónsson, 1956) Sei $\mathbf{K}$ die Klasse aller Modelle eines Systems von Aussagen (einer abzählbaren Sprache der 1. Stufe). Wir setzen voraus, daß $\mathbf{K}$ unendliche Modelle enthält und daß $\mathbf{K}$ die Amalgamierungs-Eigenschaft und die gemeinsame Einbettungs-Eigenschaft hat und unter Unionen von Ketten abgeschlossen ist.

(i) Dann existiert für jede überabzählbare reguläre Kardinalzahl $\aleph_\alpha$ mit der Eigenschaft $\forall\beta(\beta < \alpha \Rightarrow 2^{\aleph_\beta} \leq \aleph_\alpha)$ wenigstens eine $(\aleph_\alpha, \mathbf{K})$-universelle Struktur der Kardinalität $\aleph_\alpha$.

(ii) Unter der Annahme von GCH gibt es auch für jede singuläre Kardinalzahl $\aleph_\alpha$ wenigstens eine $(\aleph_\alpha, \mathbf{K})$-universelle Struktur der Kardinalität $\aleph_\alpha$.

7.2 Zusatz (B. Jónsson, 1956) Wenn darüberhinaus alle Modelle aus $\mathbf{K}$ lokalendlich sind, dann existieren auch $(\aleph_0, \mathbf{K})$-universelle Strukturen.

In der Klasse $\mathbf{K}_{aG}$ aller abelschen Gruppen sind nicht alle Strukturen lokalendlich. Dennoch ist für jede unendliche Kardinalzahl κ die teilbare Gruppe

$\mathbb{Q}^{(\kappa)} \oplus (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\kappa)}$ offenbar eine κ-universelle abelsche Gruppe der Mächtigkeit κ, wenn $\mathbb{Q}$ die additive Gruppe der rationalen Zahlen, $\mathbb{Z}$ die Gruppe der ganzen Zahlen und $G^{(\kappa)}$ das schwache direkte Produkt (auch „direkte Summe" genannt) von κ Kopien von G bezeichnet. Die Torus-Gruppe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist die direkte Summe der quasi-zyklischen Prüfer-Gruppen $Z(p^\infty)$, wenn p die Menge aller Primzahlen durchläuft.

Bernhard und Hanna Neumann haben gezeigt, daß es in der Klasse aller Gruppen keine $\aleph_0$-universellen Gruppen gibt ([NN 1950]). Nach Satz 7.1 gibt es unter der Annahme von GCH in dieser Klasse aber für jede überabzählbare Kardinalzahl $\aleph_\alpha$ eine $\aleph_\alpha$-universelle Gruppe der Mächtigkeit $\aleph_\alpha$. Nach Philip Hall ([Ha 1959])gibt es jedoch in der Klasse aller lokal-endlichen Gruppen eine abzählbare universelle Gruppe. Diese Gruppe trägt den Namen 'ULF' (als Akronym für „universell lokal-finit"). Sie ist einfach, verbal vollständig und alle ihre Automorphismen sind lokal-innere Automorphismen. Diese Gruppe spielt in der Theorie der existenziell-abgeschlossenen $\mathfrak{X}$-Gruppen eine herausragende Rolle.

Die Klasse $\mathbf{K}_{LM}$ der linear geordneten Mengen erfüllt alle Voraussetzungen von 7.1 und 7.2. Unter der Annahme von GCH gibt es daher in jeder unendlichen Kardinalzahl $\aleph_\alpha$ mindestens eine $(\aleph_\alpha, \mathbf{K}_{LM})$-universelle lineare Ordnung. Es gibt also beispielsweise auch eine $\aleph_\omega$-universelle linear geordnete Menge der Kardinalität $\aleph_\omega$. Nach Hausdorffs Satz 5.1 (iv), (v) kann eine solche Menge keine η_ω-Menge sein. Die Begriffe der $(\aleph_\alpha, \mathbf{K}_{LM})$-universellen linearen Ordnung und der η_α-Menge der Kardinalität $\aleph_\alpha$ sind also verschieden.

Übrigens sind die von Sierpiński angegebenen Mengen $H(\omega_\alpha)$ stets $\aleph_\alpha$-universelle lineare Ordnungen, auch wenn $\aleph_\alpha$ singulär ist. Darauf hat zuerst Gillman ([G 1956]) hingewiesen. Einen sehr kurzen Beweis dieser Tatsache hat Elliott Mendelson (Proc. AMS **9** (1958), 712–713) gefunden.

Die $(\aleph_\alpha, \mathbf{K})$-universellen Strukturen einer Klasse $\mathbf{K}$ sind bis auf Isomorphie noch nicht eindeutig bestimmt. Dies kann erreicht werden, wenn man (nach einem Vorschlag von Jónsson in [Jo 1960]) fordert, daß sie auch noch homogen sein sollen.

Definition (Roland Fraïssé, 1954) Sei $\mathbf{K}$ eine Klasse von Strukturen derselben Signatur. Eine Struktur $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ aus $\mathbf{K}$ heißt $\mathbf{K}$-homogen, falls jeder Isomorphismus zwischen zwei Substrukturen $\mathfrak{B} = \langle B, \ldots \rangle$ und $\mathfrak{C} = \langle C, \ldots \rangle$ von $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{B} \in \mathbf{K}, \mathfrak{C} \in \mathbf{K}$ und $\mathrm{Kard}(B) < \mathrm{Kard}(A)$ zu einem Automorphismus von $\mathfrak{A}$ erweitert werden kann.

η_α-Mengen der Kardinalität $\aleph_\alpha$ sind offenbar homogen (d. h. $\mathbf{K}_{LM}$-homogen). Die Bedingung der Homogenität ist auch im Falle anderer Klassen von Strukturen studiert worden. Im Falle der Klasse $\mathbf{K}_G$ aller Gruppen haben Gregory Cherlin und U. Felgner in [ChF 1991, ChF 2000] eine Klassifikation aller endlichen homogenen Gruppen und aller unendlichen auflösbaren homogenen Gruppen gegeben.

7.3 Satz (B. Jónsson, 1960) Sei $\mathbf{K}$ die Klasse aller Modelle eines Systems von

Aussagen (einer abzählbaren Sprache der 1. Stufe). Wir setzen voraus, daß **K** unendliche Modelle enthält und daß **K** die Amalgamierungs-Eigenschaft und die gemeinsame Einbettungs-Eigenschaft hat und unter Unionen von Ketten abgeschlossen ist. Dann existiert für jede überabzählbare reguläre Kardinalzahl $\aleph_\alpha$ mit der Eigenschaft $\forall\beta(\beta < \alpha \Rightarrow 2^{\aleph_\beta} \leq \aleph_\alpha)$ eine $(\aleph_\alpha, \mathbf{K})$-universelle **K**-homogene Struktur der Kardinalität $\aleph_\alpha$, und je zwei $(\aleph_\alpha, \mathbf{K})$-universelle **K**-homogene Strukturen der Kardinalität $\aleph_\alpha$ sind isomorph.

Die η_α-Mengen der Kardinalität $\aleph_\alpha$ sind genau die $(\aleph_\alpha, \mathbf{K}_{LM})$-universellen $\mathbf{K}_{LM}$-homogenen Strukturen der Kardinalität $\aleph_\alpha$. Daher ist Satz 7.3 offenbar eine Verallgemeinerung von Satz 5.4.

Hausdorff betrachtete 1936 die Boolesche Faktor-Algebra $P(\omega)/P_\mathrm{e}(\omega)$ der Teilmengen von ω modulo dem Ideal $P_\mathrm{e}(\omega)$ der endlichen Teilmengen. Wir hatten darüber in 3. berichtet. Er zeigte, daß maximale Ketten in dieser Menge stets η_1-Mengen und daher insbesondere universelle, homogene linear-geordnete Mengen sind. Jerome Keisler hat dieses Ergebnis 1966 verallgemeinert ([K 1966]). Auf der Grundlage der Mengenlehre ZSF mit Auswahlaxiom und Kontinuums-Hypothese CH bewies er den folgenden Satz:

7.4 Satz (H. J. Keisler, 1966) $P(\omega)/P_\mathrm{e}(\omega)$ ist eine universelle, homogene Boolesche Algebra der Mächtigkeit des Kontinuums.

Man sagt, daß eine Boolesche Algebra $\mathfrak{B} = \langle B, \sqcap, \sqcup, -, 0, 1\rangle$ die *starke abzählbare Trennungs-Eigenschaft* besitzt, falls für je zwei abzählbare Teilmengen X und Y von B mit der Eigenschaft

$$x_1 \sqcup x_2 \sqcup \cdots \sqcup x_n < y_1 \sqcap y_2 \sqcap \cdots \sqcap y_m$$

für beliebige endliche Teilmengen $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq X$ und $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\} \subseteq Y$ stets ein Element $b \in B$ existiert derart, daß

$$x_1 \sqcup x_2 \sqcup \cdots \sqcup x_j < b < y_1 \sqcap y_2 \sqcap \cdots \sqcap y_k$$

für beliebige endliche Teilmengen $\{x_1, x_2, \ldots, x_j\} \subseteq X$ und $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\} \subseteq Y$ gilt. Es handelt sich hier offenbar um eine direkte Übertragung der Eigenschaft (*) aus 5. auf Boolesche Algebren. Jede unendliche Boolesche Algebra, die die starke abzählbare Trennungs-Eigenschaft besitzt, ist $\aleph_1$-universell. Damit kann man jetzt Satz 5.1 (ii) von Hausdorff wie folgt übertragen (siehe Sabine Koppelbergs Artikel *Algebraic theory* in [Mon 1989], Band 1, S. 82)):

7.5 Satz (Unter der Voraussetzung von CH) Bis auf Isomorphie ist $P(\omega)/P_\mathrm{e}(\omega)$ die einzige Boolesche Algebra der Kardinalität $\aleph_1$, die die starke abzählbare Trennungseigenschaft besitzt.

Wenn man CH nicht voraussetzt, dann muß $P(\omega)/P_\mathrm{e}(\omega)$ nicht universell sein. Man kann (mit der 'Erzwingungs-Methode' von Paul Cohen) Modelle der

Mengenlehre konstruieren, in denen $2^{\aleph_0}$ beliebig groß ist, derart, daß ω_2 nicht in $P(\omega)/P_e(\omega)$ ordnungstreu einbettbar ist.

Das MARTINsche Axiom MA impliziert, daß jede wohlgeordnete Menge der Kardinalität $\leq 2^{\aleph_0}$ und jede linear geordnete Menge der Kardinalität $< 2^{\aleph_0}$ in $P(\omega)/P_e(\omega)$ einbettbar ist. Aus dem „Proper Forcing Axiom" PFA von SAHARON SHELAH ergibt sich, daß es eine linear geordnete Menge M der Kardinalität $2^{\aleph_0}$ gibt, die nicht in $P(\omega)/P_e(\omega)$ einbettbar ist. Daher ist auch die Intervall-Algebra über M nicht in $P(\omega)/P_e(\omega)$ einbettbar (für einen Beweis siehe den Artikel von JAMES BAUMGARTNER in [KuV 1984], 913–959, dort S. 933–934).

Universell-homogene Strukturen haben interessante Anwendungen in der Theorie der Modelle der Mengenlehre gefunden. Wenn gezeigt werden soll, daß es nur unter Verwendung des Auswahlaxioms beweisbar ist, daß alle Strukturen einer Klasse **K** eine gewisse Eigenschaft haben, dann adjungiert man zu einem vorgegebenen abzählbaren Standard-Modell der Mengenlehre eine „generische Kopie" einer universell-homogenen Struktur aus **K** mit dem Ziel, ein symmetrisches Modell der Mengenlehre zu erhalten, in dem die generische Kopie die betrachtete Eigenschaft hoffentlich nicht hat (cf. U. FELGNER in [F 1971], S. 112 ff. für eine Reihe von Anwendungen dieser Methode).

Aufgrund der starken Voraussetzungen sind die Sätze 7.1, 7.2 und 7.3 nicht allzu häufig anwendbar. Der Begriff der universell-homogenen Struktur ist wohl noch nicht der allgemeine Begriff, der den Begriff der η_α-Menge in angemessener Weise verallgemeinert. Ein solcher Begriff ist 1958 von ROBERT L. VAUGHT gefunden worden. Es handelt sich um den Begriff der „saturierten Struktur". Wir berichten darüber in den folgenden beiden Abschnitten.

8. Saturierte Modelle

H. JEROME KEISLER, MICHAEL MORLEY und ROBERT L. VAUGHT haben erkannt, daß man zu einer umfassenden Verallgemeinerung des Begriffes der η_α-Menge kommt, wenn man in den Begriffen der „universellen" und der „homogenen" Struktur überall den algebraischen Begriff des Morphismus durch den modell-theoretischen Begriff des „elementaren Morphismus" ersetzt.

Um diese Verallgemeinerung beschreiben zu können, benötigen wir einige Begriffe aus der Modelltheorie. Formale Sprachen der 1. Stufe bezeichnet man auch als „elementare Sprachen". Das sind Sprachen, in denen Quantifizierungen nur über Elemente einer Struktur, nicht aber über Teilmengen der Struktur, möglich sind. Daher erhalten im Folgenden alle Begriffe, in denen auf elementare Sprachen Bezug genommen wird, den Zusatz „elementar".

(1) Nach TARSKI (1936) nennt man zwei Strukturen, in denen dieselben Aussagen (aus der zugehörigen Sprache $\mathcal{L}$ der 1. Stufe) gelten, *elementar-äquivalent.* $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ symbolisiert die elementare Äquivalenz von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.

(2) Nach TARSKI und VAUGHT (1956) nennt man eine Substruktur $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ einer Struktur $\mathfrak{B} = \langle B, \ldots \rangle$ eine *elementare Substruktur*, falls

in beiden Strukturen dieselben $\mathcal{L}_A$-Aussagen gelten. Dabei ist $\mathcal{L}_A$ die Erweiterung von $\mathcal{L}$ um Namen für jedes Element von A.

(3) Eine ein-eindeutige Abbildung F einer $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ in eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{B}$ ist eine *elementare Abbildung*, falls für jede $\mathcal{L}$-Formel $\Phi(v_1, \ldots, v_n)$ und beliebige Elemente $a_1, \ldots, a_n \in A$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \Phi(a_1, \ldots, a_n) \text{ genau dann wenn } B \models \Phi(F(a_1), \ldots, F(a_n)).$$

Dabei steht $\mathfrak{A} \models \Psi$ für die Aussage „Ψ gilt in $\mathfrak{A}$".

In der folgenden Definition wird der Begriff der homogen-universellen Struktur modifiziert. Die Definition findet sich für abzählbare Strukturen bei Vaught: *Homogeneous universal models of complete theories*, Notices AMS **5** (1958), S. 775, und dann auch für überabzählbare Strukturen bei H. J. Keisler ([K 1961]) und M. Morley-R. L. Vaught ([MoV 1962]).

Definition (R. L. Vaught, 1958):

(i) Eine Struktur $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ heißt *elementar-universell*, falls jede mit $\mathfrak{A}$ elementar-äquivalente Struktur $\mathfrak{B} = \langle B, \ldots \rangle$, für die $\mathrm{Kard}(B) < \mathrm{Kard}(A)$ gilt, mit einer elementaren Substruktur von $\mathfrak{A}$ isomorph ist.

(ii) Eine Struktur $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ heißt *elementar-homogen*, falls für je zwei wohlgeordnete Teilmengen $B = \{b_\alpha;\ \alpha \in \delta\} \subseteq A$ und $C = \{c_\alpha;\ \alpha \in \delta\} \subseteq A$ mit $\delta < \mathrm{Kard}(A)$ und $\langle \mathfrak{A}, b_\alpha \rangle_{\alpha\in\delta} \equiv \langle \mathfrak{A}, c_\alpha \rangle_{\alpha\in\delta}$ stets ein Automorphismus φ von $\mathfrak{A}$ existiert mit $\varphi(b_\alpha) = c_\alpha$ für alle $\alpha \in \delta$.

Definition (R. L. Vaught, 1958) Eine Struktur $\mathfrak{A}$ heißt *saturiert*, wenn sie elementar-universell und elementar-homogen ist.

Ursprünglich benutzte Vaught dieses Wort nur für abzählbare Strukturen (R. L. Vaught: *Prime models and saturated models*, Notices AMS **5** (1958), p. 780, Abstract 550–39). Er schrieb:

> Call $\mathfrak{A}$ a saturated model of T, if (i) $\mathfrak{A}$ is denumerable and is an elementary extension of an isomorph of each denumerable model of T, and (ii) if $m \in \omega$ and $\langle a_0, \ldots, a_m \rangle$ and $\langle b_0, \ldots, b_m \rangle$ satisfy in $\mathfrak{A}$ the same formulas of T, then there is an automorphism φ of $\mathfrak{A}$ with $\varphi(a_i) = b_i$ for $i \leq m$.

Wenn man die Beschränkung auf abzählbare Strukturen fallen läßt, dann erhält man den heute üblichen Begriff der „saturierten Struktur", wie oben angegeben. Für saturierte Strukturen gilt:

8.1 Satz (H. J. Keisler, M. Morley, R. L. Vaught, 1961) Je zwei elementar-äquivalente elementar-universelle und elementar-homogene Strukturen der gleichen Mächtigkeit sind isomorph.

Zu diesem und dem folgenden Satz waren Keisler, Morley und Vaught durch die Untersuchungen Hausdorffs über η_α-Mengen motiviert worden, worauf KEISLER in seiner Abhandlung ([K 1961]), p. 490, ausdrücklich hingewiesen hat. – Von der Existenz saturierter Modelle handelt der folgende Satz:

8.2 Satz (H. J. KEISLER, M. MORLEY, R. L. VAUGHT, 1961/1962) Auf der Grundlage von $\mathsf{ZSF} + \mathsf{GCH}$ gilt für jede Ordinalzahl $\alpha > 0$ und jede abzählbare Sprache $\mathcal{L}$ der 1. Stufe die folgende Aussage: Jede unendliche $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{M} = \langle M, \ldots \rangle$, deren Kardinalität $\leq \aleph_{\alpha+1}$ ist, hat eine saturierte elementare Erweiterung der Kardinalität $\aleph_{\alpha+1}$.

Der Beweis verläuft ähnlich wie der Beweis der Sätze 5.1 (ii) und 7.3. Man verwendet dabei die Tatsache, daß die Klasse **K** aller Strukturen, die mit einer vorgegebenen Struktur elementar äquivalent sind, die gemeinsame „Einbettungs-Eigenschaft“ hat. Sie hat auch die „Amalgamierungs-Eigenschaft“, wenn man sie so formuliert, daß die dabei auftretenden Einbettungen allesamt „elementare Einbettungen“ sind. Sie ist nach dem „Ketten-Satz“ von TARSKI (1952) auch unter Unionen elementarer Ketten abgeschlossen. Für saturierte Strukturen gelten ferner die folgenden Aussagen:

(a) Eine linear geordnete Menge der Kardinalität $\aleph_\alpha$ ist genau dann saturiert, wenn sie eine η_α-Menge ist. Aus Satz 8.1 folgt daher sofort Satz 5.1(ii), daß je zwei η_α-Mengen der Kardinalität $\aleph_\alpha$ isomorph sind. Zum Beweis benötigt man allerdings auch die elementare Äquivalenz der η_α-Mengen, die sich aber sofort aus dem Satz von LÖWENHEIM-SKOLEM und CANTORS Isomorphie-Satz 1.1 ergibt.

(b) Ein überabzählbarer reell-abgeschlossener Körper K der Kardinalität $\aleph_\alpha$ ist genau dann saturiert, wenn er als geordnete Menge eine η_α-Menge ist. Aus Satz 8.1 und TARSKIs Satz 6.4 (i) folgt daher auf neuem Wege Satz 6.3 von ERDÖS-GILLMAN-HENRIKSEN.

(c) Algebraisch-abgeschlossene Körper sind genau dann saturiert, wenn sie unendlichen Transzendenzgrad über ihrem Primkörper haben. Aus Satz 8.1 folgt also der klassische Satz von STEINITZ, daß überabzählbare gleichmächtige algebraisch-abgeschlossene Körper gleicher Charakteristik isomorph sind. Zum Beweis benötigt man hier allerdings auch die elementare Äquivalenz dieser Körper, die sich aber (nach ABRAHAM ROBINSON, 1955) sofort aus der 'Modell-vollständigkeit' dieser Körper ergibt.

(d) Überabzählbare saturierte abelsche Gruppen sind „algebraisch-kompakt“ im Sinne von I. KAPLANSKY. Diese Einsicht ermöglicht eine Klassifikation aller abelschen Gruppen bis auf elementare Äquivalenz (WANDA SZMIELEW, 1955, – siehe auch PAUL EKLOF – E. R. FISHER [EFi 1972]).

(e) Die saturierten elementaren Erweiterungen $\mathbb{R}^*$ des Körpers $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen sind „Nicht-standard Erweiterungen“ von $\mathbb{R}$, in denen die LEIBNIZsche Differential- und Integral-Rechnung mit all ihren infinitesimal-kleinen Elementen durchführbar ist.

Einen anderen Zugang zum Begriff der „saturierten Struktur" hat MORLEY in seiner Dissertation ([Mo 1965]) aufgezeigt. Sein Zugang ermöglichte die Ausbildung der sogenannten „Stabilitäts-Theorie", die zu zahlreichen tiefen Einsichten geführt hat. Wir berichten darüber in dem folgenden Abschnitt.

9. Die Kardinalzahlen der saturierten Modelle

MORLEY hat als Ausgangspunkt seiner Untersuchungen ([Mo 1965]) nicht den HAUSDORFFschen Satz 5.1 (i) genommen (von dem JÓNSSON in [Jo 1956, 1960] und auch noch MORLEY & VAUGHT in [MoV 1962] ausgegangen waren), sondern die Eigenschaft (*), die wir zu Beginn von 5. formuliert haben. Das führte ihn zu der folgenden zentralen Definition.

Definition (H. J. KEISLER, [K 1961], M. MORLEY, [Mo 1965]). Sei $\mathfrak{M} = \langle M, \ldots \rangle$ irgendeine Struktur, deren zugehörige Sprache $\mathcal{L}$ eine Sprache der 1. Stufe ist. Sei $A \subseteq M$ und $\mathcal{L}_A$ die Erweiterung von $\mathcal{L}$ um Namen für jedes Element von A. Eine Menge p von $\mathcal{L}_A$-Formeln wird *Typ* von $\mathfrak{M}$ über A genannt, falls (1) in den Formeln aus p höchstens die eine Variable v frei vorkommt, (2) für jede $\mathfrak{L}_A$-Formel Φ, in der höchstens v frei vorkommt, entweder $\Phi \in p$ oder $(\neg\Phi) \in p$ gilt, und (3) $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}) \cup p$ widerspruchsfrei ist (d. h. wenn jede endliche Teilmenge von p in $\mathfrak{M}$ simultan erfüllbar ist).

Mit $S_{\mathfrak{M}}(A)$ bezeichnete MORLEY die Menge aller Typen von $\mathfrak{M}$ über A ($S_{\mathfrak{M}}(A)$ ist der STONE-Raum der zugehörigen LINDENBAUM-Algebra, woran das Symbol „S" erinnern soll).

Man sagt, daß ein Typ p in $\mathfrak{M} = \langle M, \ldots \rangle$ *realisiert* ist, wenn es ein $a \in M$ gibt, das alle in p liegenden Formeln simultan erfüllt. Mit der Notation aus 2. können wir sagen, daß p in $\mathfrak{M}$ realisiert ist, wenn es ein $a \in M$ mit $p = t_{\mathfrak{M}}(a/A)$ gibt.

Ein Typ, der in $\mathfrak{M}$ nicht realisiert ist, wird von $\mathfrak{M}$ *ausgelassen*.

Ein Typ p (von $\mathfrak{M}$ über A) beschreibt also die „Stelle", an der ein Element von $\mathfrak{M}$ steht, oder stehen könnte. Diese Beschreibung darf die Namen für die Elemente von A benutzen.

Mit dieser Terminologie läßt sich die HAUSDORFFsche Einschalt-Bedingung (*) aus 5. auch wie folgt formulieren:

Definition. Eine linear geordnete Menge $\mathfrak{M} = \langle M, \leq \rangle$ ist eine η_α-Menge genau dann, wenn für jede Teilmenge $A \subseteq M$ mit $\mathrm{Kard}(A) < \aleph_\alpha$ jeder Typ p aus $S_{\mathfrak{M}}(A)$ in $\mathfrak{M}$ realisiert ist.

Diese Formulierung erlaubt, den HAUSDORFFschen Begriff der η_α-Menge wie folgt zu verallgemeinern (Wir setzen hier und im Folgenden stets voraus, daß $\mathcal{L}$ eine abzählbare Sprache der 1. Stufe ist).

Definition (H. J. KEISLER [K 1961], M. MORLEY [Mo 1965]) Eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{M} = \langle M, \ldots \rangle$ nennt man $\aleph_\alpha$-*saturiert*, wenn für jede Teilmenge A von M mit

$\mathrm{Kard}(A) < \aleph_\alpha$ gilt, daß jeder Typ p aus $S_{\mathfrak{M}}(A)$ in $\mathfrak{M}$ realisiert ist. $\mathfrak{M} = \langle M, \ldots \rangle$ nennt man *saturiert*, wenn $\mathfrak{M}$ $\mathrm{Kard}(M)$-saturiert ist.

Es ist leicht zu sehen, daß eine Struktur genau dann im Sinne von KEISLER und MORLEY saturiert ist, wenn sie im Sinne von VAUGHT saturiert ist, d. h. wenn sie elementar-universell und elementar-homogen ist. Wie im Beweis von Satz 8.1 folgt jetzt:

9.1 Satz. Je zwei elementar-äquivalente $\aleph_\alpha$-saturierte Strukturen der Mächtigkeit $\aleph_\alpha$ sind isomorph.

Ebenso ergibt sich wie im Beweis von Satz 8.2:

Satz 9.2. Jede unendliche $\mathcal{L}$-Struktur, deren Kardinalität $\leq 2^{\aleph_\alpha}$ ist, hat eine $\aleph_{\alpha+1}$-saturierte elementare Erweiterung der Kardinalität $2^{\aleph_\alpha}$.

HAUSDORFF hat in Satz 5.1 (vii) gezeigt, daß es eine $\eta_{\alpha+1}$-Menge der Kardinalität $\aleph_{\alpha+1}$ genau dann gibt, wenn $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$. Läßt sich auch diese Aussage auf saturierte Modelle übertragen? Gibt es für beliebige Theorien T $\aleph_{\alpha+1}$-saturierte Modelle von T der Kardinalität $\aleph_{\alpha+1}$ genau dann, wenn $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$?

Die Antwort ist negativ. Beispielsweise hat die Theorie, die kein einziges außer-logisches Axiom enthält, die reinen (unstrukturierten) Mengen als Modelle. Diese Theorie hat in jeder Mächtigkeit $\aleph_\alpha$ ein $\aleph_\alpha$-saturiertes Modell der Mächtigkeit $\aleph_\alpha$. Es gibt aber auch weniger banale Beispiele für dieses Phänomen. So hat auch die Theorie der algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik 0 in jeder unendlichen Mächtigkeit $\aleph_\alpha$ ein $\aleph_\alpha$-saturiertes Modell der Mächtigkeit $\aleph_\alpha$.

Es stellt sich die Frage, ob man die Trennungslinie zwischen den Theorien, die in jeder überabzählbaren Mächtigkeit $\aleph_\alpha$ ein $\aleph_\alpha$-saturiertes Modell der Mächtigkeit $\aleph_\alpha$ haben, und den Theorien, die wie im HAUSDORFFschen Satz 5.1 (vii) $\aleph_{\alpha+1}$-saturierte Modelle nur in Kardinalitäten $\geq 2^{\aleph_\alpha}$ haben, scharf ziehen kann. Die Antwort ist positiv. Aber das konnte man erst erkennen, nachdem die MORLEYsche Theorie der $\aleph_1$-Kategorizität zur sogenannten Stabilitätstheorie ausgebaut worden war.

Es zeigt sich hier eine tiefgehende Dichotomie in der Klasse aller Theorien, und zwar sind Theorien T entweder „stabil" oder „unstabil" im Sinne der folgenden Definition:

Definition (F. ROWBOTTOM, ca. 1967) Eine vollständige Theorie T, die in einer abzählbaren Sprache $\mathcal{L}$ der 1. Stufe formuliert ist, heißt $\aleph_\alpha$-*stabil*, falls für jedes T-Modell $\mathfrak{M} = \langle M, \ldots \rangle$ und jede Teilmenge $A \subseteq M$ mit $\mathrm{Kard}(A) \leq \aleph_\alpha$ gilt, daß auch $\mathrm{Kard}(S_{\mathfrak{M}}(A)) \leq \aleph_\alpha$ ist.

Man nennt eine Theorie T *stabil*, wenn sie in wenigstens einer unendlichen Kardinalzahl stabil ist. Andernfalls heißt sie *unstabil*. Die stabilen Theorien zerfallen nach einem tiefliegenden Satz von SHELAH in drei Klassen.

9.3 Stabilitäts-Spektrums Satz (S. SHELAH [Sh 1969]) Sei T eine vollständige Theorie, deren Axiome in einer abzählbaren Sprache der 1. Stufe formuliert sind. Dann ist das Stabilitäts-Spektrum $\mathrm{Spek}(T) = \{\aleph_\alpha;\ T \text{ ist } \aleph_\alpha\text{-stabil}\}$ eine der folgenden vier Klassen: $\emptyset$, $\{\kappa; \kappa = \kappa^{\aleph_0}\}$, $\{\kappa;\ 2^{\aleph_0} \leq \kappa\}$, $\{\kappa, \aleph_0 \leq \kappa\}$.
Für diese vier Klassen ist die folgende Sprechweise üblich:

T ist *unstabil*, wenn $\mathrm{Spek}(T) = \emptyset$,

T ist *stabil*, wenn $\mathrm{Spek}(T) \supseteq \{\kappa;\ \kappa = \kappa^{\aleph_0}\}$,

T ist *super-stabil*, wenn $\mathrm{Spek}(T) \supseteq \{\kappa;\ 2^{\aleph_0} \leq \kappa\}$,

T ist *ω-stabil*, wenn $\mathrm{Spek}(T) = \{\kappa;\ \aleph_0 \leq \kappa\}$.

Es gilt $\{\kappa;\ \aleph_0 \leq \kappa\} \supseteq \{\kappa; 2^{\aleph_0} \leq \kappa\} \supseteq \{\kappa;\ \kappa = \kappa^{\aleph_0}\}$ und daher ist jede ω-stabile Theorie auch superstabil, und jede superstabile Theorie auch stabil.

Nach einem anderen Satz von SHELAH (1971) sind die unstabilen Theorien genau diejenigen Theorien, in denen unendliche lineare Ordnungen „vorkommen“. Es gilt, genauer gesprochen, der folgende Satz:

9.4 Satz (S. SHELAH [Sh 1971]) Sei T eine vollständige Theorie, deren Axiome in einer abzählbaren Sprache $\mathcal{L}$ der 1. Stufe formuliert sind. Dann sind äquivalent:

(i) T ist unstabil,

(ii) Es gibt eine $\mathcal{L}$-Formel $\Phi(u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n)$, ein T-Modell $\mathfrak{M} = \langle M, \ldots\rangle$ und unendlich viele n-tupel $\mathfrak{a}_i = (a_{1,i}, \ldots, a_{n,i}) \in M^n$, so daß für alle natürlichen Zahlen $j, k \in \mathbb{N}$ gilt: $(\mathfrak{M} \models \Phi[\mathfrak{a}_j, \mathfrak{a}_k]) \Leftrightarrow j < k$.

Die Theorie der in-sich-dichten linear-geordneten Mengen ohne Randpunkte ist offenbar unstabil. Auch die Theorie der reell-abgeschlossenen Körper ist unstabil. Dagegen ist die Theorie der algebraisch-abgeschlossenen Körper fester Charakteristik in allen unendlichen Kardinalzahlen stabil.

Der folgende Satz 9.5 von VIKTOR HARNIK ([Har 1975]) berücksichtigt die Dichotomie in stabile und unstabile Theorien. Dieser Satz ist eine weitreichende Verallgemeinerung von HAUSDORFFs Satz 5.1 (iv), (v). Der Beweis verwendet eine gehörige Portion Stabilitäts-Theorie. Der Satz 9.5 erklärt, warum HAUSDORFFs Satz 5.1 (iv), (v), (vii) nicht generell auf saturierte Modelle übertragen werden kann. Man kann die Aussagen (iv), (v), (vii) von Satz 5.1 nur im Falle unstabiler Theorien auf saturierte Modelle übertragen. Für stabile Theorien gelten schärfere Aussagen.

9.5 Satz (V. HARNIK, 1975)

(i) Vollständige $\aleph_\alpha$-stabile Theorien besitzen $\aleph_\alpha$-mächtige saturierte Modelle.

(ii) Vollständige, unstabile Theorien besitzen in keiner singulären Kardinalzahl $\aleph_\alpha$ ein $\aleph_\alpha$-mächtiges saturiertes Modell.

Es ist bemerkenswert, daß Satz 9.5 auf der Grundlage der üblichen Mengenlehre (mit Auswahlaxiom) beweisbar ist, und von der generalisierten Kontinuums Hypothese GCH keinen Gebrauch macht.

Insgesamt zeigt sich die Theorie der η_α-Mengen als ein lebendiges Gebiet. Viele Anwendungen und Fortentwicklungen haben wir nicht erwähnt, etwa die Resultate über Partitions-Relationen für η_α-Mengen. Andere Fortentwicklungen haben wir nur ansatzsweise erläutert, etwa die mengentheoretischen Resultate im Umfeld der Lücken-Sätze (vergl. dazu den umfangreichen Übersichts-Artikel von M. Scheepers ([S 1993]). Das Gebiet ist noch lange nicht ausgeschöpft und wird sicherlich auch im neuen Jahrhundert noch zu zahlreichen Anwendungen und Weiterbildungen führen.

Literatur

[A 1962] Alling, N. L.: *On the existence of real-closed fields that are η_α sets of power $\aleph_\alpha$.* Transactions Amer. Math. Soc. **103** (1962), 341–352.

[ACH 1981] Antonovskij, M. Y.; Chudnovsky, D. V.; Chudnovsky, G. V.; Hewitt, E.: *Rings of real-valued continuous functions, II.* Math. Zeitschrift **176** (1981), 151–186.

[C 1895] Cantor, G.: *Sui numeri transfiniti.* Estratto d'una lettera di Georg Cantor a G. Vivanti, 13. Dezember 1893. Rivista di Matematica (1895), 104–108.

[C 1895/1897] Cantor, G.: *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre.* Math. Ann. **46** (1895), 481–512; **49** (1897), 207–246. WA: [C 1932], 282–356.

[C 1932] Cantor, G.: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts.* Ed. E. Zermelo, Springer Verlag, Berlin 1932.

[C 1991] Cantor, G.: *Briefe.* Hrsg. von H. Meschkowski und W. Nilson. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York 1991.

[Ca 1990] Cameron, P.: *Oligomorphic Permutation Groups.* Cambridge Univ. Press, Cambridge 1990.

[ChF 1991] Cherlin, G.; Felgner, U.: *Homogeneous solvable Groups.* J. London Math. Soc. (2), **44** (1991), S. 102–120.

[ChF 2000] Cherlin, G.; Felgner, U.: *Homogeneous finite Groups.* J. London Math. Soc. (2), **62** (2000), 784–794.

[D 1977] Douwen, E. van: *Hausdorff gaps and a nice countably paracompact nonnormal space.* In: Topology Proceedings, Band 1 (Konferenz, Auburn Univ., 1976), Math. Dept., Auburn Univ., Auburn, Ala., 1977, 239–242.

[DuB 1873] Du Bois-Reymond, P.: *Eine neue Theorie der Convergenz und Divergenz von Reihen mit positiven Gliedern.* Journal für die reine u. angew. Math. **76** (1873), 61–91.

[DuB 1875] Du Bois-Reymond, P.: *Ueber asymptotische Werthe, infinitäre Approximationen und infinitäre Auflösung von Gleichungen.* Math. Ann. **8** (1875), 363–414.

[DuB 1882] Du Bois-Reymond, P.: *Die allgemeine Functionentheorie.* Lauppsche Buchhandlung, Tübingen 1882.

[EFi 1972] Eklof, P.; Fisher, E.: *The elementary theory of abelian groups.* Annals of Math. Logic **4** (1972), 115–171

[En 1972] Engelking, R.: *Hausdorff's Gaps and Limits and Compactifications.* In: *Theory of Sets and topology* (G. Asser et al., Herausgeber), Berlin 1972, 89–94.

[ErGH 1955] Erdös, P.; Gillman, L.; Henriksen, M.: *An Isomorphism Theorem for real closed Fields.* Annals of Math. **61** (1955), 542–554.

[F 1971] Felgner, U.: *Models of ZF Set Theory.* Springer Lecture Notes in Mathematics, Nr. 223, Berlin-Heidelberg 1971.

[F 1980] Felgner, U.: *Kategorizität.* Jahresber. der DMV **82** (1980), 12–32.

[Fi 1981] Fisher, G.: *The Infinite and Infinitesimal Quantities of du Bois-Reymond and their Reception.* Archive for History of Exact Sciences **24** (1981), 101–163.

[G 1956] Gillman, L.: *Some remarks on η_α-sets.* Fund. Math. **43** (1956), 77–82.

[Gr 1970] Grattan-Guinness, I.: *An unpublished paper by Georg Cantor: Principien einer Theorie der Ordnungstypen, Erste Mitteilung.* Acta Math. **124** (1970), 65–107.

[Ha 1959] Hall, Ph.: *Some constructions for locally finite groups.* J. London Math. Soc. **34** (1959), 305–319.

[Har 1975] Harnik, V.: *On the existence of saturated Models of stable theories.* Proc. Amer. Math. Soc. **52** (1975), 361–367.

[Harz 1964] Harzheim, E.: *Beiträge zur Theorie der Ordnungstypen, insbesondere der η_α-Mengen.* Math. Annalen **154** (1964), 116–134.

[Harz 1965] Harzheim, E.: *Einbettungssätze für totalgeordnete Mengen.* Math. Annalen **158** (1965), 90–108.

[Hu 1904] Huntington, E. V.: *The continuum as a type of order: an exposition of the modern theory.* Annals of Math. **6** (1904), 178–179.

[J 1964] JACOBSON, N.: *Lectures in Abstract Algebra.* Van Nostrand, Princeton 1964.

[Jo 1956] JÓNSSON, B.: *Universal Relational Systems.* Math. Scand. **4** (1956), 193–208.

[Jo 1960] JÓNSSON, B.: *Homogeneous universal Relational Systems.* Math. Scand. **8** (1960), 137–142.

[K 1961] KEISLER, H. J.: *Ultraproducts and elementary classes.* Indagationes Math. **23** (1961), 477–495.

[K 1966] KEISLER, H. J.: *Universal homogeneous Boolean algebras*, Michigan Math. J. **13** (1966), 129–132.

[KuV 1984] KUNEN, K.; VAUGHAN, J. E. (Herausgeber): *Handbook of Set-theoretic Topology.* North-Holland Publ. Comp. , Amsterdam 1984.

[M 1972] MACINTYRE, A.: *On algebraically closed groups.* Annals of Math. **96** (1972), 53–97.

[Ma 1991] MAZUR, K.: *F_σ-ideals and $\omega_1\omega_1^*$-gaps in the Boolean algebras $P(\omega)/I$.* Fund. Math. **138** (1991), 103–111.

[Mo 1965] MORLEY, M.: *Categoricity in power.* Transactions Amer. Math. Soc. **114** (1965), 514–538.

[Mon 1989] MONK, J. D. (Ed.): *Handbook of Boolean Algebras.* North-Holland, Amsterdam 1989.

[MoV 1962] MORLEY, M.; VAUGHT, R. L.: *Homogeneous Universal Models.* Math. Scand. **11** (1962), 37–57.

[Mos 1938] MOSTOWSKI, A.: *Über gewisse universelle Relationen.* Annales de la Société Polonaise de Math. **17** (1938), 117–118.

[NN 1950] NEUMANN, B. H.; NEUMANN, H.: *A remark on generalized free products.* J. London Math. Soc. **25** (1950), 202–204.

[Noe 1968] NÖBELING, G.: *Verallgemeinerung eines Satzes von Herrn E. Spekker.* Inventiones math. **6** (1968), 41–55.

[PI 1987] PURKERT, W.; ILGAUDS, H. J.: *Georg Cantor 1845–1918.* Birkhäuser, Basel 1987.

[Pr 1983] PRIESS-CRAMPE, S.: *Angeordnete Strukturen, Gruppen, Körper, projektive Ebenen.* Springer-Verlag, Berlin 1983.

[S 1993] SCHEEPERS, M.: *Gaps in ω^ω.* In: *Set Theory of the Reals* (HAIM JUDAH, Herausgeber), Israel Math. Conference Proceedings Nr. 6, Bar-Ilan Universität 1993, 439–561.

[Sh 1969] Shelah, S.: *Stable theories.* Israel J. Math. **7** (1969), 187–202.

[Sh 1971] Shelah, S.: *Stability, the f. c. p., and superstability; Modeltheoretic properties of formulas in first-order Theory.* Annals of Math. Logic **3** (1971), 271–362.

[Si 1933] Sierpiński, W.: *Sur l'existence des suites transfinies décroissantes d'ensembles F_σ.* C. R. Soc. Sci. et Lettr., Warschau, Klasse 3, **26** (1933), 85–89. WA: Sierpiński, W.: *Œuvres Choisies*, Band 3, PWN-Editions Warschau 1976, 177–180.

[Si 1949] Sierpiński, W.: *Sur une propriété des ensembles ordonnés.* Fund. Math. **36** (1949), 56–67. WA: Sierpiński, W.: *Œuvres Choisies*, Band 3, PWN-Editions Warschau 1976, 602–612.

[Sk 1920] Skolem, T.: *Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit und Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen.* Skrifter Videnskabsakademiet i Kristiania **4** (1920), 1–36. WA: Th. Skolem: *Selected Works in Logic* Ed. J. E. Fenstad, Universitatsforlaget, Oslo 1970, 103–136.

[St 1910] Steinitz, E.: *Algebraische Theorie der Körper.* Journal für die reine u. angew. Math. **137** (1910), 167–309.

[T 1998] Todorčević, S.: *Gaps in analytic quotients.* Fund. Math. **156** (1998), 85–97.

[U 1923/1924] Urysohn, P.: *Un théorème sur la puissance des ensembles ordonnés.* Fund. Math. **5** (1923), 14–19; **6** (1924), 278.

[Z 1935] Zorn, M.: *Elimination of the continuum-hypothesis.* Bull. AMS **41** (1935), 787–788.