Zum Begriff des topologischen Raumes

M. Epple, H. Herrlich, M. Hušek, G. Preuß, W. Purkert, E. Scholz

Inhalt:

1. Historische Wurzeln

Mit Konzepten wie Konvergenz, Grenzwert, Stetigkeit, Kurve, Fläche, Raum, Kontinuum, haben sich seit der Antike sowohl Mathematiker als auch Philosophen auseinandergesetzt. In der Mathematik waren es vor allem das Streben nach Strenge in der Analysis, nach Verschärfung der Begriffe und nach Emanzipation von naiver Anschauung, die schließlich Voraussetzungen für die Herausbildung der allgemeinen Topologie schufen.[1]

In der Philosophie war das Gegensatzpaar kontinuierlich – diskret stets ein Thema des Diskurses. Dazu heißt es z. B. bei B. Russell in den *Principles of Mathematics:*

[1] Vgl. [M 1964], insbes. S. 66–95, wo zu Recht die Arithmetisierung des Linearkontinuums, d. h. die Schaffung arithmetischer Theorien der reellen Zahlen durch Weierstrass, Méray, Cantor und Dedekind als wichtige Voraussetzung für die Entstehung der Punktmengentopologie eingehend behandelt wird.

> The notion of continuity has been treated by philosophers, as a rule, [...] But as to what they meant by continuity and discreteness, they preserved a discreet and continuous silence; [...][2]

Ob dieser Spott oder ein ähnlicher von RIESZ[3] der philosophischen Diskussion gerecht wird, sei dahingestellt. Für HAUSDORFF jedenfalls war die philosophische Auseinandersetzung mit dem Problem von Raum und Zeit gewiß nicht ohne Einfluß auf sein mathematisches Schaffen (s. u.).

In BOURBAKIS *Elemente der Mathematikgeschichte* heißt es in Bezug auf HAUSDORFFS *Grundzüge der Mengenlehre*:

> Mit HAUSDORFF ([Grundzüge], Kap. 7–8–9) beginnt die mengentheoretische Topologie, wie wir sie heute verstehen. Auf den Umgebungsbegriff zurückgreifend, verstand er es, unter den Hilbertschen Axiomen über Umgebungen in der Ebene diejenigen herauszugreifen, die seiner Theorie gleichzeitig die wünschenswerte Präzision und die erwünschte Allgemeinheit gaben. Das Kapitel, in dem er die Folgerungen daraus entwickelt, ist immer noch ein Vorbild für eine axiomatische Theorie, die abstrakt, doch von vornherein auf die Anwendungen eingestellt ist.[4]

Dem ersten und dem letzten Satz dieser Passage ist ohne Vorbehalt zuzustimmen. Der mittlere Satz jedoch scheint die Herausarbeitung eines so allgemeinen und zugleich so fruchtbaren Raumkonzepts, wie es HAUSDORFF in die Mathematik eingeführt hat, unzulässig zu vereinfachen. Ganz abgesehen davon, daß ein direkter Rückgriff HAUSDORFFs auf HILBERTs Noten von 1902/1903[5] nicht zu belegen ist[6], sind mehrere Entwicklungslinien zu benennnen, aus denen HAUSDORFF schließlich mit dem axiomatischen Aufbau einer allgemeinen Theorie topologischer Räume die Bilanz gezogen hat. Als diese historischen Wurzeln der allgemeinen Topologie können gelten:

1. Die Theorie der Punktmengen des $\mathbb{R}^n$ und ihre Anwendungen in der Theorie der reellen Funktionen, der Maß- und Integrationstheorie, der Funktionentheorie und der Geometrie,

2. die Theorie der geordneten Mengen, insbesondere die zahlreichen Versuche, topologische Begriffe auf Ordnungsstrukturen zu übertragen,

3. die weitgehende Verallgemeinerung des Raumbegriffs in der Geometrie im Verlaufe des 19. Jahrhunderts, insbesondere das Studium von Mannigfaltigkeiten und die Auseinandersetzungen um das Raumproblem, und schließlich

4. die Herausbildung erster abstrakter Raumkonzepte (FRÉCHET, RIESZ, amerikanische topologische Schule um E. H. MOORE).

---

[2] [Ru 1903], S. 287.

[3] „Mit besonderer Vorliebe, meistens jedoch mystischer als die Wahrsager von Delos, äußern sich über die Stetigkeit Philosophen, die nicht Mathematiker sind.“ [Ri 1907a], S. 310.

[4] [Bou 1971], S. 168.

[5] [Hi 1902, 1903a].

[6] Genaueres dazu unter 2.

Am Beginn der Betrachtung von Punktmengen stehen konkrete Beispiele für abzählbare in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ dichte Mengen. So erkannte C. G. J. JACOBI bereits 1835, daß die Wertmenge eines hyperelliptischen Integrals (von gewissen Entartungsfällen abgesehen) in der komplexen Ebene dicht liegt.[7] B. RIEMANN, der in seiner Habilitationsschrift über trigonometrische Reihen das nach ihm benannte Integral einführte, gab dort ein Beispiel einer Funktion an, die in seinem Sinne integrierbar ist, obwohl sie auf einer abzählbaren dichten Menge Sprünge besitzt (sie springt „zwischen je zwei noch so engen Grenzen unendlich oft").[8] DIRICHLETs allgemeiner Funktionsbegriff[9] und RIEMANNs Habilitationsschrift waren der Ausgangspunkt eines systematischen Studiums der Eigenschaften reeller Funktionen. In diesem Rahmen und auch in der WEIERSTRASSschen Schule der Funktionentheorie kristallisierten sich schon vor CANTOR gewisse Begriffe der Punktmengenlehre heraus.

So hat H. HANKEL 1870 ein Verfahren angegeben, welches er „Kondensationsprinzip der Singularitäten" nannte und welches die Konstruktion von Funktionen erlaubte, die auf einer abzählbaren dichten Menge Singularitäten eines gegebenen Typs haben. HANKEL unterschied bereits in einem Intervall dichte Mengen (er nannte sie Punktescharen, die eine Strecke erfüllen) und nirgends dichte Mengen (diese nannte er zerstreut liegende Punktescharen).[10] 1876 gelang es P. DU BOIS-REYMOND, mittels eines Kondensationsprinzips der Singularitäten eine stetige Funktion anzugeben, deren Fourierreihe auf einer abzählbaren dichten Menge divergiert.[11] In seinem Buch *Die allgemeine Functionentheorie*[12] beginnt DU BOIS- REYMOND, Punktmengen als eigenständigen Untersuchungsgegenstand zu betrachten; er spricht von "Punctsystemen" oder "Punctvertheilungen". Eine in einem Intervall dichte Punktmenge nennt er pantachisch oder eine Pantachie, eine nirgends dichte Punktmenge heißt apantachisch oder eine Apantachie. Die Idee, den Prozeß der Bildung von Häufungspunkten (bei DU BOIS-REYMOND Verdichtungspunkte genannt) zu iterieren, führt er bis zu einer Punktmenge P, für die $x = 0$ „Verdichtungspunkt unbegrenzt hoher Ordnung"[13] ist; es findet sich jedoch keine Andeutung, diesen Prozeß weiter ins Transfinite fortzusetzen. DU BOIS-REYMOND betonte, daß seine Überlegungen unabhängig von denen CANTORs entstanden sind; sie waren jedoch 1882 durch CANTORs Publikationen überholt. Wirklich neu ist DU BOIS-REYMONDs Verfahren, durch Herausnehmen eines offenen Intervalls (α, β) aus $[0, 1]$, dann je eines aus den verbleibenden Intervallen $[0, \alpha]$ und $[\beta, 1]$ usw. ein "Punctsystem" zu konstruieren, „welches sich nicht durch Ausschliessung von Verdichtungspuncten auf ein System isolirter Puncte reduciren lässt,

[7] [Ja 1835], §8. Vgl. dazu [Ul 2003].
[8] [R 1854a/1867], S. 274.
[9] [Dir 1829], [Dir 1837]. Vgl. dazu [Ju 1976] und dieser Band, S. 623–624.
[10] [Ha 1870/1882], S. 87.
[11] [B 1876].
[12] [B 1882].
[13] Ebd., S. 187/188.

…“[14]. Es wird hier das allgemeine Konstruktionsprinzip linearer Cantormengen angedeutet; CANTOR selbst hat erst 1883 die spezielle Cantormenge $C_{\frac{1}{3}}$ bekannt gemacht und 1884 das allgemeine Konstruktionsprinzip angegeben.

Für CANTOR waren wie für DU BOIS-REYMOND die trigonometrischen Reihen Ausgangspunkt seiner mengentheoretischen Untersuchungen. Er löste sich aber sehr bald vom konkreten Hintergrund der reellen Funktionen und schuf eine allgemeine Mengenlehre, für welche die Punktmengen das wichtigste Anwendungsbeispiel waren.

K. WEIERSTRASS, als dessen Schüler sich CANTOR hauptsächlich betrachtete, hatte bereits seit den sechziger Jahren des 19. Jahrhunderts in seinen Vorlesungen über analytische Funktionen – und hier liegt eine zweite Quelle der Theorie der Punktmengen – grundlegende Begriffe dieser Theorie eingeführt wie Umgebung im $\mathbb{R}^n$ (offene n-dimensionale Intervalle oder offene Kugeln), Häufungspunkt (bei WEIERSTRASS Grenzstelle genannt) und Gebiet.[15] Dabei ist die Terminologie noch nicht streng fixiert und Ausdrücke wie Bereich, Gebiet, Kontinuum werden zu verschiedenen Zeiten in wechselnden Bedeutungen gebraucht. WEIERSTRASS hatte auch ein zentrales Theorem bewiesen und ausgiebig angewendet, den heute nach BOLZANO und ihm benannten Satz.

Erst CANTOR hat die Punktmengenlehre des $\mathbb{R}^n$ zu einer eigenständigen Theorie entwickelt. Der grundlegende Begriff dieser Cantorschen Theorie ist der Begriff der Ableitung: Die Ableitung P' einer Punktmenge P ist die Menge ihrer Häufungspunkte. Der Prozeß des Ableitens kann iteriert werden: $P^{(n)} = (P^{(n-1)})'$. CANTOR konnte 1872 zeigen, daß jede Punktmenge $P \subset [-\pi, \pi]$ mit $P^{(n)} = \emptyset$ für ein $n \in \mathbb{N}$ Eindeutigkeitsmenge für die trigonometrische Entwicklung ist.[16] Mit dem Studium der Eindeutigkeitsmengen eröffnete er ein bis heute fruchtbares Forschungsgebiet.[17] Der Prozeß der Bildung sukzessiver Ableitungen einer Punktmenge führte CANTOR zur Idee der transfiniten Ordnungszahlen und ist somit auch der Ursprung der allgemeinen Mengenlehre.[18]

1874 konnte CANTOR zeigen, daß die Menge der reellen algebraischen Zahlen abzählbar, die Menge $[0, 1]$ jedoch nicht abzählbar ist.[19] In [C 1878] wird zunächst definiert, wann Mengen gleiche Mächtigkeit haben. Das Hauptresultat dieser Arbeit ist der Beweis der Gleichmächtigkeit von $[0, 1]^n$ und $[0, 1]$. Hier formuliert CANTOR auch erstmals die Kontinuumhypothese in Form der Behauptung, daß eine unendliche lineare Punktmenge entweder abzählbar oder mit $[0, 1]$ gleichmächtig sei.

CANTORS Hauptwerk ist die sechsteilige Aufsatzserie *Über unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten*, die 1879–1884 in den Mathematischen Annalen erschien.[20] Neben der Lehre von den transfiniten Zahlen und philosophischen Re-

---

[14] Ebd., S. 188.

[15] Siehe z. B. [W 1878], S. 188–192, [W 1886], S. 65–69.

[16] [C 1872].

[17] Siehe z. B. [K/L 1987], [K/L 1992], [S 1963].

[18] [P/I 1987], S. 39.

[19] [C 1874]. Das Wort “abzählbar” verwandte CANTOR noch nicht. Es kommt erstmals in [C 1879–1884], Nr. 1, S. 4 vor. Ein Teil von [C 1874] stammt von DEDEKIND; s. S. 589.

[20] [C 1879–1884].

flexionen wird hier auch die Punktmengenlehre weiterentwickelt. Mit Hilfe des Ableitungsbegiffes definiert CANTOR verschiedene topologische Eigenschaften von Punktmengen: P heißt abgeschlossen, falls $P' \subseteq P$, P heißt insichdicht, falls $P \subseteq P'$; eine abgeschlossene insichdichte Menge heißt perfekt. P heißt ferner isoliert, falls $P \cap P' = \emptyset$, sie heißt separiert, falls sie keine insichdichte Teilmenge enthält. Jede isolierte Punktmenge ist separiert, aber nicht umgekehrt. Eine lineare Punktmenge heißt in (a, b) überall dicht, falls $P' \supseteq [a, b]$. Entsprechend heißt im $\mathbb{R}^n$ die Punktmenge P in einem „stetigen Gebiet a" überall dicht, wenn P' „das stetige Gebiet a selbst mit allen Punkten der Begrenzung des Letzteren enthält."[21] Der Begriff "stetiges Gebiet" wird nicht definiert; offenbar hat CANTOR eine offene Menge im Auge. Lineare Punktmengen, die nirgends dicht sind, nennt CANTOR „in keinem noch so kleinen Intervall überalldicht."[22]

CANTORS Hauptinteresse bei der Analyse von Punktmengen war das Kontinuumproblem. Im Mittelpunkt stehen deshalb bei ihm Mächtigkeitssätze, die alle darauf beruhen, daß der $\mathbb{R}^n$ separabel ist. An der Spitze steht der Satz, daß eine Menge paarweise disjunkter offener Mengen stets höchstens abzählbar ist. Der Begriff "offene Menge" kommt bei CANTOR nicht explizit vor; in seiner Formulierung des Satzes dürfen die „n-dimensionalen stetigen Theilgebiete" höchstens an ihren Begrenzungen zusammenstoßen.[23] Aus diesem Theorem folgt, daß jede isolierte Menge höchstens abzählbar ist.

Grundlage für alles weitere ist die folgende durch transfinite Induktion[24] gewonnene Zerlegung der Ableitung P' einer Punktmenge P:

$$P' = \sum_{\gamma<\alpha} (P^{(\gamma)} - P^{(\gamma+1)}) + P^{(\alpha)}$$

für jedes $\alpha < \omega_1$. Da $\sum_{\gamma<\alpha}(P^{(\gamma)} - P^{(\gamma+1)})$ für $\alpha < \omega_1$ höchstens abzählbar ist, ergibt sich der Satz: P' ist genau dann höchstens abzählbar, wenn es ein α aus der ersten oder zweiten Zahlklasse gibt mit $P^{(\alpha)} = \emptyset$.[25] Ist P' überabzählbar, so ist

$$\bigcap_{\alpha<\omega_1} P^{(\alpha)} = P^{(\omega_1)} \text{ perfekt (perfekter Kern von } P).$$

Mit $P^{(\omega_1)} = S$ gilt dann $P' = R + S$, wobei R höchstens abzählbar und S perfekt ist. Da jede abgeschlossene Menge sich als Ableitung einer Punktmenge auffassen läßt, ergibt sich daraus schließlich das Theorem:

Ist P abgeschlossen und überabzählbar, so ist $P = R + S$, R höchstens abzählbar, S perfekt.

---

[21] Ebd., Nr. 3, S. 114.

[22] Ebd., Nr. 6, S. 481.

[23] Ebd., Nr. 3, S. 117.

[24] CANTOR spricht von vollständiger Induktion; die Bezeichnung "transfinite Induktion" stammt von HAUSDORFF.

[25] CANTOR nennt ein solches P reduzibel. Dieser Begriff hat sich nicht durchgesetzt. Bei HAUSDORFF hat "reduzibel" eine andere Bedeutung (siehe diesen Band, S. 381).

Dieses Theorem ist später als Satz von CANTOR-BENDIXSON bezeichnet worden, weil BENDIXSON einen Irrtum CANTORS bezüglich der Reduzibilität von R aufklären konnte. CANTOR bewies ferner, daß der perfekte Kern schon bei einer Ableitungsordnung $\alpha < \omega_1$ erreicht wird (sog. Cantorsches Haupttheorem), d. h. man braucht als Ableitungsordnungen nur Zahlen aus den ersten beiden Zahlklassen.

Im Satz von CANTOR-BENDIXSON sah CANTOR eine Strategie, das Kontinuumproblem anzugreifen, zunächst für den speziellen Fall abgeschlossener Mengen. Dazu mußte die Mächtigkeit der perfekten Mengen bestimmt werden. Für in einem Intervall (a, b) überall dichte perfekte Mengen erhält man wegen $P' \supseteq [a, b]$ und $P = P'$ unmittelbar für P die Mächtigkeit des Kontinuums. Für die nirgendsdichten linearen perfekten Mengen gab CANTOR 1884 in [C 1879–1884], Nr. 6 die allgemeine Konstruktion, die sich bei DU BOIS-REYMOND schon angedeutet fand (siehe Fußnote 14), und konnte daraus schließen, daß diese Mengen ebenfalls die Mächtigkeit des Kontinuums haben. Daraus und aus dem Satz von CANTOR-BENDIXSON folgt sofort die Richtigkeit der Kontinuumhypothese für lineare abgeschlossene Mengen:

> Eine unendliche abgeschlossene lineare Punktmenge hat entweder die erste Mächtigkeit oder sie hat die Mächtigkeit des Linearkontinuums, [...][26]

CANTOR kündigt dann die Erledigung des Kontinuumproblems mit folgenden Worten an:

> Dass dieser merkwürdige Satz eine weitere Gültigkeit auch für nicht abgeschlossene lineare Punktmengen und ebenso auch für alle n-dimensionalen Punktmengen hat, wird in späteren Paragraphen bewiesen werden.[27]

Die angekündigte Fortsetzung ist nicht erschienen. In [C 1885] macht CANTOR den Versuch, eine analoge Zerlegung wie im Satz von CANTOR-BENDIXSON für beliebige Punktmengen zu finden. Er gibt hier, ebenfalls durch transfinite Iteration eines Abspaltungsprozesses isolierter Mengen, die Zerlegung einer Punktmenge P in ihren separierten Bestandteil R und ihren insichdichten Kern S.[28] R ist höchstens abzählbar; Mächtigkeitsaussagen über den insichdichten Kern lassen sich – wie wir heute wissen – nicht machen.

In [C 1885] betrachtet CANTOR auch Verdichtungspunkte, ohne dafür eine eigene Bezeichnung einzuführen. Er zeigt, daß die Menge der Verdichtungspunkte von P eine Teilmenge des insichdichten Kerns ist. Dies beruht auf der Separabilität des $\mathbb{R}^n$.[29]

Die Punktmengenlehre wurde sehr rasch als das geeignete Instrumentarium erkannt, um auf verschiedenen Gebieten die Fundamente tiefer zu legen, die gegenseitigen Beziehungen der grundlegenden Begriffe zu studieren, die Grenzen

---

[26] [C 1879–1884], Nr. 6, S. 488.

[27] Ebd., S. 488.

[28] CANTOR nennt den insichdichten Kern die letzte Kohärenz; vgl. die Darstellung bei HAUSDORFF, dieser Band, S. 378.

[29] Siehe die Darstellung bei HAUSDORFF, dieser Band, S. 369.

dieser Begriffe auszuloten und den Rückgriff auf die naive Anschauung zurückzudrängen. Es waren vor allem drei mathematische Bereiche, deren rasche Entwicklung ohne Mengenlehre, insbesondere ohne die Punktmengentheorie, nicht denkbar ist, und die ihrerseits für die Mathematik des 20. Jahrhunderts von großer Bedeutung waren, nämlich

- die Maß- und Integrationstheorie,
- die Theorie der reellen Funktionen,
- die Geometrie und Topologie des $\mathbb{R}^n$.

Zumeist im Zusammenhang mit der Entwicklung dieser Gebiete wurde auch die Punktmengentheorie des $\mathbb{R}^n$ selbst weiterentwickelt, bis sie schließlich durch HAUSDORFFs Synthese als Spezialfall in der allgemeinen Topologie aufging, wobei sich zeigte, daß große Teile ihres Begriffs- und Methodenarsenals weitgehender Verallgemeinerungen fähig waren. Es ist jedoch hervorzuheben, daß auch die klassische Punktmengentheorie des $\mathbb{R}^n$ noch genügend interessante und schwierige Fragen bereithielt und z. B. in der amerikanischen topologischen Schule weiter gepflegt wurde bis hin zu tiefen Ergebnissen in neuester Zeit; s. dazu die historische Einführung, dieser Band, S. 69 ff.

Zur Geschichte der Maß- und Integrationstheorie sei auf die ausgezeichnete Monographie [Haw 1975] verwiesen; die Entwicklung der Theorie der reellen Funktionen ist in [Med 1976] und [Med 1991] dargestellt. Gute zeitgenössische Überblicke sind [Sch 1900] und [Pr 1899]. Im Rahmen der Entwicklung dieser Theorien erfuhr die Punktmengentheorie zwei wesentliche Bereicherungen: die Einführung der Mengen erster und zweiter Kategorie durch R. BAIRE und den Überdeckungssatz von HEINE-BOREL. BAIRE führte das Kategoriekonzept in [Ba 1898] ein.[30] In den *Grundzügen* erwähnt HAUSDORFF diese Begriffe nur kurz; später hat er sich für die Anwendung von Kategorieargumenten lebhaft interessiert.[31] Überdeckungsargumente haben in der Theorie der reellen und komplexen Funktionen schon bei HEINE, WEIERSTRASS und PINCHERLE eine Rolle gespielt, ohne daß sie als Satz über Punktmengen erschienen. HEINE z. B. bewies damit, daß jede in einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetige Funktion dort gleichmäßig stetig ist.[32] BOREL war der erste, der den Überdeckungssatz für abgeschlossene beschränkte Punktmengen des $\mathbb{R}^1$ formulierte und bewies.[33] Mit dem Borelschen Satz haben sich in der Folgezeit außer BOREL selbst, der ihn 1903 auf den Raum erweiterte, zahlreiche Forscher beschäftigt; einen Überblick gibt der Enzyklopädieartikel von ZORETTI und ROSENTHAL.[34]

[30] Siehe auch [Du 1976].

[31] [H 1927a], §27, [H 1931]. Im Nachlaß gibt es eine Zusammenstellung von 16 Existenzbeweisen, die auf einem Kategorieargument beruhen: NL HAUSDORFF: Kapsel 42: Fasz. 735.

[32] [He 1872], S. 188.

[33] [Bo 1895], S. 51.

[34] [Z/Ro 1923], S. 882–886. S. ferner [Hil 1926]. Bezüglich der Entwicklung verschiedener Kompaktheitskonzepte s. auch [Tay 1985], S. 304–307, und [En 1989], S. 132–133.

In der Geometrie wurde die Punktmengenlehre vor allem für diejenigen Untersuchungen herangezogen, welche die Mathematiker des 19. Jahrhunderts unter dem Stichwort "Analysis Situs" einordneten. Schon CANTOR hatte seine Mengenlehre auch als Grundlage für die Geometrie betrachtet:

> Durch die von mir an die Spitze der Mannichfaltigkeitslehre gestellten Begriffe mache ich mich anheischig, die sämmtlichen Gebilde der algebraischen sowohl wie der transzendenten Geometrie nach allen ihren Möglichkeiten zu erforschen, wobei die Allgemeinheit und Schärfe der Resultate von keiner anderen Methode übertroffen werden dürften.[35]

Eigene Arbeiten zur Verwirklichung dieses Programms hat CANTOR nicht vorgelegt; mit seinem Beweis der Gleichmächtigkeit von $[0,1]^n$ und $[0,1]$ hat er jedoch den bis dahin naiv gebrauchten Dimensionsbegriff ins Wanken gebracht und damit zahlreiche Versuche angeregt, die topologische Invarianz der Dimension für euklidische Räume zu beweisen, was schließlich BROUWER 1911 gelang.[36] Die Geschichte des Problems der topologischen Invarianz der Dimension findet man eingehend bei [Jo 1979, 1981] beschrieben; zur Entwicklung der Dimensionstheorie im allgemeinen sei auf [Br 1928], [Ka/Si 1997], [Ko/M 1997] und [Cr/Jo 1999] verwiesen.

Schon im Erlanger Programm von F. KLEIN ist angedeutet, daß in der "Analysis Situs" Invarianten bei Homöomorphismen eine wichtige Rolle spielen.[37] A. HURWITZ hat in seinem berühmten Vortrag auf dem ersten internationalen Mathematikerkongreß in Zürich erstmals die Aufgabe der "Analysis Situs" dahingehend bestimmt, Invarianten bei Homöomorphie aufzufinden (er betrachtete eineindeutige stetige Abbildungen abgeschlossener Mengen, für die dann die Umkehrung automatisch stetig ist; eine Bezeichnung für diese Abbildungen hat er noch nicht eingeführt). Nachdem er erläutert hat, daß homöomorphe Punktmengen jeweils als eine Klasse gleichberechtigter Punktmengen aufgefaßt werden können, heißt es:

> Diese Einteilung der Punktmengen in Klassen bildet, beiläufig bemerkt, die allgemeinste Grundlage der Analysis situs. Die Aufgabe der Analysis situs ist es, die Invarianten der einzelnen Klassen von Punktmengen aufzusuchen.[38]

Als Beispiel definiert HURWITZ eine einfach geschlossene stetige Kurve als eine

> [...] Punktmenge, welche in dieselbe Klasse gehört wie die von den Punkten auf dem Rande eines Quadrates gebildete Punktmenge.[39]

Das Studium topologischer Invarianten bis 1907 dokumentiert SCHOENFLIES ([Sch 1908]).[40] Besonders zu erwähnen ist in diesem Zusammenhang die Habi-

[35] [C 1879–1884], Nr. 5, S. 591.
[36] [Br 1911].
[37] [Kl 1872], S. 30.
[38] [Hu 1898], S. 102.
[39] Ebd., S. 103.
[40] SCHOENFLIES selbst spielte eine wichtige Rolle in dem Bestreben, die geometrischen Ideen und Methoden der Analysis Situs mit Ideen der Punktmengenlehre zusammenzuführen; s. dazu die historische Einführung zum Text der *Grundzüge*, dieser Band, S. 41–45.

litationsschrift von H. TIETZE.[41] Einen Überblick über den Stand Anfang der zwanziger Jahre gibt [Z/Ro 1923], S.953–962.

HAUSDORFF selbst hat lange vor der Niederschrift der *Grundzüge* die Bedeutung des Studiums topologisch invarianter Eigenschaften – ganz im Sinne von HURWITZ – klar gesehen. In einem im Nachlaß erhaltenen Manuskript[42] heißt es im Hinblick auf die Gruppe der Homöomorphismen der Ebene bzw. des Raumes:

> Invariante Merkmale sind also: Offenheit oder Geschlossenheit, Zahl der getrennten Zweige, Zahl der Doppelpunkte und mehrfachen Punkte einer Curve u. a., im Raume die Art der Knotenbildung einer verschlungenen Curve, bei Flächen die Existenz oder Nichtexistenz von Rändern, Einseitigkeit oder Zweiseitigkeit, Zusammenhang, Geschlecht u. a.: das Studium dieser invarianten Eigenschaften – invariant gegenüber der Gruppe der eindeutigen stetigen Punkttransformationen – bildet denjenigen Zweig der Geometrie, der Topologie oder Analysis situs genannt wird.[43]

1890 bzw. 1891 haben PEANO und HILBERT Beispiele für Kurven (im Sinne stetiger Bilder von $[0,1]$) angegeben, die ein Quadrat ausfüllen.[44] Diese aufsehenerregenden und scheinbar paradoxen Gebilde sowie der 1887 von C. JORDAN (nicht ganz streng) bewiesene nach ihm benannte Kurvensatz[45] lösten eine Flut von Forschungen über Kontinua, speziell über Kurven, unter topologischen Gesichtspunkten aus, deren Grundlage ebenfalls die Punktmengentheorie war. Die Geschichte der Theorie der Kontinua findet man in [Ch 1998] (mit über 700 Literaturangaben); [Sch 1908] bzw. [Z/Ro 1923] resümieren den Forschungsstand bis 1907 bzw. bis Anfang der zwanziger Jahre. HAUSDORFF hat sich in den zwanziger und dreißiger Jahren lebhaft für die Forschungen über Kontinua interessiert, wovon zahlreiche Studien im Nachlaß zeugen.[46]

In den Vorlesungen zur Mengenlehre, die HAUSDORFF vor der Niederschrift der Grundzüge hielt, wird stets auch die Theorie der Punktmengen abgehandelt. In der Leipziger Vorlesung von 1901[47] geschieht das in enger Anlehnung an CANTOR. Der Grundbegriff ist der Ableitungsbegriff, auf den alles zurückgeführt wird. HAUSDORFF beschränkt sich im wesentlichen auf lineare Punktmengen; als Umgebungen von x fungieren Intervalle $(x-\delta, x+\varepsilon)$.

Die Bonner Vorlesung von 1910[48] behandelt die Punktmengentheorie des $\mathbb{R}^n$ bereits mit dem Kalkül der α-, β- und γ-Punkte, wie er in den *Grundzügen*

---

[41] [T 1908].

[42] NL HAUSDORFF: Kapsel 49: Fasz. 1082. Der Faszikel ist nicht datiert. Es handelt sich um eine Ausarbeitung unter dem Titel "Gruppentheorie", die für ein weiteres Publikum bestimmt war und vermutlich aus der Zeit stammt, als HAUSDORFF vorhatte, ein Buch über Zeit und Raum zu schreiben (1904/1905); vgl. die Bem. zu Faszikel 1067 in der Einleitung, dieser Band, S. 53–54.

[43] Ebd. Bl. 28.

[44] [Pe 1890], [Hi 1891].

[45] [Jor 1887], S. 587 ff. Der Beweis ist, in der Sprache der Nonstandard-Analysis verstanden, streng.

[46] siehe Band III dieser Edition.

[47] NL HAUSDORFF: Kapsel 03: Fasz. 12. Abgedruckt im Band I dieser Edition.

[48] NL HAUSDORFF: Kapsel 07: Fasz. 29.

dann ganz allgemein für topologische Räume durchgeführt ist. Als Umgebungen dienen n-dimensionale Intervalle – HAUSDORFF spricht auch durchweg von Intervallen, nicht von Umgebungen. So lautet z. B. die Definition der α-Punkte:

> x heißt in Bezug auf A ein α-Punkt, wenn jedes Intervall, das x einschliesst, Punkte von A (also mindestens einen) einschliesst; [...][49]

In der Bonner Vorlesung von 1912[50] bleibt die Punktmengentheorie ebenfalls noch auf den $\mathbb{R}^n$ beschränkt; hier finden wir aber erstmals die Idee einer axiomatischen Umgebungstheorie angedeutet (s. ausführlicher unter 2.). In den einführenden Bemerkungen zu dieser Vorlesung heißt es:

> Zweck und Ursprung der Mengenlehre: Schaffung exakter Grundlagen für Geometrie und Analysis (Functionentheorie); Emancipation von der *Anschauung*.[51]

1.2 Topologie auf geordneten Mengen

DEDEKINDS Schrift *Stetigkeit und irrationale Zahlen*[52], deren Inhalt aus dem Jahre 1858 stammt, steht am Beginn von Bemühungen, topologische Begriffe auf den Begriff der Ordnung zurückzuführen oder allgemeiner die topologischen Eigenschaften geordneter Mengen zu studieren. DEDEKIND fand es 1858 als junger Professor in Zürich außerordentlich unbefriedigend, daß der Begriff der stetigen Größe, welcher der Analysis zugrundegelegt wurde, nicht rein arithmetisch definiert war, sondern durch Rückgriff auf die geometrische Anschauung erklärt wurde. Er schreibt:

> Für mich war damals dies Gefühl der Unbefriedigung ein so überwältigendes, dass ich den festen Entschluss fasste, so lange nachzudenken, bis ich eine rein arithmetische und völlig strenge Begründung der Prinzipien der Infinitesimalanalysis gefunden haben würde. Man sagt so häufig, die Differentialrechnung beschäftige sich mit den stetigen Grössen, und doch wird nirgends eine Erklärung von dieser Stetigkeit gegeben,[...][53]

Mit Hilfe des Begriffs des Schnittes im geordneten Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen[54] gelingt DEDEKIND die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ zum Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Die "Stetigkeit" des neu erschaffenen Bereiches der reellen Zahlen findet DEDEKIND darin, daß es in $\mathbb{R}$ keine Lücken gibt, d. h. für jeden Schnitt $\mathbb{R} = A_1 + A_2$ in $\mathbb{R}$ hat entweder A_1 ein größtes oder A_2 ein kleinstes Element.

---

[49] Ebd., Bl. 58.

[50] NL HAUSDORFF: Kapsel 09: Fasz. 34.

[51] Ebd., Bl. 3.

[52] [D 1872/1967].

[53] Ebd., S. 4.

[54] DEDEKIND nennt eine Zerlegung $\mathbb{Q} = A_1 + A_2$ in eine Anfangs- und ein Endstück einen Schnitt. Bei HAUSDORFF heißt eine solche Zerlegung einer geordneten Menge A nur dann ein Schnitt, wenn A_1 ein größtes, A_2 kein kleinstes oder A_1 kein größtes, A_2 ein kleinstes Element hat ([H 1908], S. 441.). HAUSDORFF gelingt mit DEDEKINDS Verfahren die Vervollständigung einer beliebigen geordneten dichten Menge (dieser Band, S. 191).

Geordnete Mengen, für die – modern gesprochen – die Ordnungstopologie dem ersten Abzählbarkeitsaxiom nicht genügt, studierte erstmals DU BOIS-REYMOND.[55] Er betrachtete monotone ins Unendliche wachsende Funktionen; diese Funktionen setzte er stillschweigend als vergleichbar in folgendem Sinne voraus: Für je zwei Funktionen $f(x), g(x)$ tritt genau einer der drei folgenden Fälle ein:

$$\lim_{x\to\infty} = \frac{f(x)}{g(x)} = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0, \quad \lim_{x\to\infty} = \frac{f(x)}{g(x)} = c \quad \text{mit } 0 < c < \infty \quad .$$

Im ersten Fall heißt $f(x)$ infinitär größer als $g(x)$ (in Zeichen $f(x) \succ g(x)$), im zweiten heißt $f(x)$ infinitär kleiner als $g(x)$ (in Zeichen $f(x) \prec g(x)$), im dritten Fall schließlich heißen f und g infinitär gleich ($f \sim g$). Die Klassen infinitär gleicher Funktionen sind die du Bois-Reymondschen "Unendlich", von ihm auch "infinitäre Puncte" genannt.[56] DU BOIS- REYMOND berücksichtigt nicht, daß es unvergleichbare Funktionen gibt, und spricht von der Menge aller "Unendlich", der sogenannten infinitären Pantachie.[57] Man erhält nach HAUSDORFF nicht die, sondern eine Pantachie, indem man etwa alle mit $\ln x$ vergleichbaren Funktionen betrachtet; mit dieser konkreten Pantachie arbeitet DU BOIS-REYMOND in der Tat. Für sie gilt der folgende DU BOIS-REYMONDsche Einschaltungssatz:

> Man kann sich einem gegebenen Unendlich $\lambda(x)$ mit keiner Functionenfolge $\varphi_p(x), p = 1, 2, \ldots$ in solcher Weise nähern, dass man nicht stets Functionen $\psi(x)$ angeben könnte, welche für beliebig große Werthe von p der Ungleichheit
>
> $$\lambda(x) \underset{\prec}{\succ} \psi(x) \underset{\prec}{\succ} \varphi_p(x) \qquad \text{genügen.}$$ [58]

Dieses völlig abweichende Verhalten der infinitären Pantachie von der sogenannten vollständigen Pantachie (das ist die reelle Gerade) „hat gewiss etwas Befremdliches.“[59] DU BOIS-REYMOND ahnt auch schon, daß diese Topologie nicht mit einem Abstandsbegriff beschrieben werden kann:

> In der Raumlehre erschien schon früh, wenn auch vorübergehend und nirgend recht greifbar, der Gedanke einer vom Längenmass unabhängigen Geometrie, und dieser Gedanke wurde neuerdings nach verschiedenen Richtungen, in gewissem Sinne durch die Schöpfungen von Poncelet, dann von Riemann, Listing, u. A. verwirklicht. Aehnlich scheinen in der Analysis die Nebel des Unendlichen zu einer Rechnungsart ohne Zahlen sich verkörpern zu sollen.[60]

[55] [B 1877], [B 1882].
[56] [B 1882], S. 282.
[57] HAUSDORFF hat die Unzulänglichkeiten bei DU BOIS-REYMOND eingehend analysiert: [H 1907a], S. 105 ff.
[58] [B 1877], S. 153.
[59] Ebd., S. 157.
[60] Ebd., S. 167.

HAUSDORFF blieb es vorbehalten, die originellen, aber noch vagen Ideen von DU BOIS-REYMOND streng zu begründen und in seine allgemeine Theorie der geordneten Mengen einzufügen.[61]

Die Grundlagen der Theorie der geordneten Mengen gehen ebenfalls auf CANTOR zurück. Bereits Ende 1884 hatte er eine Theorie der Ordnungstypen entwickelt und eine entsprechende Arbeit an G. MITTAG-LEFFLER zur Publikation in *Acta Mathematica* gesandt. Ein erster Teil war schon gesetzt, als MITTAG-LEFFLER den Druck sistierte. CANTOR müsse mehr positive Resultate vorweisen; wenn es ihm mit der Typentheorie doch wenigstens gelungen wäre, das Kontinuumproblem zu lösen, dann wäre der Druck gerechtfertigt![62] So wurden CANTORS Ideen über geordnete Mengen und ihre Ordnungstypen erst durch seine letzten zusammenfassenden Arbeiten [C 1895–1897] bekannt.[63] Dort definiert CANTOR die Begriffe "geordnete Menge" und "Ordnungstypus", ferner den Begriff der zu einer Kardinalzahl gehörigen Typenklasse und die Addition und Multiplikation von Ordnungstypen. Von besonderem Interesse in unserem Zusammenhang sind zwei Sätze CANTORS, welche eine rein mengentheoretisch-topologische Charakterisierung der Ordnungstypen η und θ liefern (η ist der Typus der rationalen Zahlen aus $(0,1)$, θ der Typus von $[0,1]$, jeweils in natürlicher Anordnung). CANTOR nennt eine geordnete Menge M "überall dicht" (HAUSDORFF sagt später dicht), wenn zwischen je zwei Elementen von M mindestens ein weiteres Element von M liegt; M ist dicht genau dann, wenn es in der Ordnungstopologie insichdicht ist. CANTORS erstes Theorem lautet nun:
Eine abzählbare geordnete Menge, die dicht und ohne Randelemente ist, hat den Typus η.

Um θ zu charakterisieren, versucht CANTOR, weitere Begriffe aus der Punktmengenlehre auf beliebige geordnete Mengen zu übertragen. Sei M eine geordnete Menge, so heißt eine Teilmenge vom Typus ω eine steigende, eine vom Typus ω^* eine fallende Fundamentalreihe. m_0 heißt "Grenzelement" der steigenden Fundamentalreihe $\{a_\nu\}$, wenn $a_\nu \succ m_0$ für alle ν und für jedes $m \succ m_0$ ein μ existiert mit $a_\mu \prec m$ (analog wird "Grenzelement" für fallende Fundamentalreihen definiert). Diejenigen Elemente von M, welche Grenzelemente sind, heißen die Hauptelemente von M. Jedes Hauptelement ist Häufungspunkt bzgl. der Ordnungstopologie; das Umgekehrte gilt nicht, weil CANTOR nur abzählbare Fundamentalreihen betrachtet. M heißt nun insichdicht, wenn jedes ihrer Elemente Hauptelement ist, abgeschlossen, wenn jede Fundamentalreihe von M in M ein Grenzelement besitzt und perfekt, wenn sie insichdicht und abgeschlossen ist. CANTORS Charakterisierung von θ lautet nun folgendermaßen:
Eine geordnete Menge M hat den Ordnungstypus θ, wenn gilt: 1) M ist perfekt; 2) M besitzt eine abzählbare Teilmenge S, so daß zwischen je zwei Elementen

[61] [H 1907a], [H 1909a]. S. dazu die ausführlichen Kommentare im Band I dieser Edition. Zu P. DU BOIS-REYMONDS Theorie der Unendlich und ihrer Rezeption s. auch [Fi 1981].

[62] Siehe zu der Affäre [P/I 1987], S. 129 ff.

[63] Die Arbeit für die *Acta Mathematica* wurde erst 86 Jahre später in den *Acta* publiziert: [GG 1970].

von M stets mindestens ein $s \in S$ liegt (d. h. in M liegt eine abzählbare Menge dicht).

Schoenflies hat in seinem Bericht über Mengenlehre[64] besonders betont, daß zahlreiche für Punktmengen definierte Begriffe für beliebig geordnete Mengen ohne Rückgriff auf den "stetigen Raum" definiert werden können:

> Wichtiger noch ist es, und hierin besteht das Hauptergebnis dieses Teils der Mengenlehre, daß in den Eigenschaften der Ordnungstypen auch solche Begriffe ihren allgemeinsten arithmetischen Ausdruck finden, die wir gewöhnlich als eine besondere Eigenschaft der stetigen Zahlenmenge zu betrachten gewohnt sind. Es ist dies in erster Linie [...] der Begriff des Grenzelements, ferner aber auch alle diejenigen, die bei den Punktmengen auftreten und ihre Verteilung im Raum betreffen; alles Begriffe, von denen man leicht annehmen mag, daß nicht allein der stetige Raum ihre Quelle ist, sondern daß auch ihre Geltung nicht über ihn hinausreicht.[65]

Mit der Einführung der "Intervalle" für beliebige geordnete Mengen deutet Schoenflies schon auf die Ordnungstopologie hin:

> Wir können auf die Ordnungstypen sogar den Begriff des Intervalls ausdehnen, indem wir irgend zwei Elemente m' und m'' nebst allen Elementen, die zwischen ihnen enthalten sind, als Elemente eines Intervalls auffassen; m' und m'' sind die Endelemente dieses Intervalls, während jedes zwischen ihnen gelegene Element ein inneres Element ist. Es lassen sich deshalb auch die Begriffe überall dicht und nirgends dicht auf die Ordnungstypen übertragen.[66]

Die Idee, mittels "Belegungsmengen" (Mengen Y^X) nicht nur neue Kardinalzahlen, sondern auch neue Ordnungstypen zu gewinnen, indem man Belegungsmengen lexikographisch ordnet (allgemeiner Potenzbegriff) oder durch finale Rangordnung in eine Reihenfolge bringt (Pantachiebegriff), lag Hausdorffs Untersuchungen über Ordnungstypen zugrunde und hat ihn zu einer großen Vielfalt von Typen mit sehr interessanten Eigenschaften geführt.[67] In Bezug auf seine Vorgänger schreibt Hausdorff 1906:

> [...]; von Typenkategorien, die bei mir systematisch durch den Algorithmus der Potenzbildung entstehen, sind zu gelegentlichen Zwecken einzelne Beispiele ersonnen worden.[68]

Ein solches Beispiel ist F. Bernsteins "Ultrakontinuum" bestehend aus allen Folgen $(x_1, x_2, \ldots)$, wobei die x_i Zahlen der zweiten Zahlklasse $Z(\aleph_0)$ sind.[69] Die Ordnung wird so definiert, daß $(x_1, x_2, \ldots) > (y_1, y_2, \ldots)$ ist, falls für die erste auftretende Differenzstelle, d. h. das kleinste n mit $x_n \neq y_n$, bei ungeradem $n \quad x_n > y_n$, bei geradem $n \quad x_n < y_n$ ist. Bernstein adoptierte die von Cantor für Ordnungtypen eingeführten Begriffe "Fundamentalreihe", "insichdicht",

[64] [Sch 1900].

[65] Ebd., S. 28.

[66] Ebd., S. 32.

[67] Siehe z. B. die Ausführungen über η_α-Mengen, dieser Band, S. 645 ff.

[68] [H 1906b], S. 106.

[69] [Be 1905]. Dies war ein Abdruck der Bernsteinschen Dissertation von 1901. Hausdorff hatte diese Dissertation am 29. 6. 1901 erhalten (NL Hausdorff: Kapsel 03: Fasz. 12, Bl. 37).

“abgeschlossen” und “perfekt” und behauptete z. B. (fälschlicherweise), daß jede abgeschlossenene Menge seines Ultrakontinuums entweder abzählbar oder von der Mächtigkeit $\aleph_1$ oder von Kontinuumsmächtigkeit ist. HAUSDORFF hat sich eingehend mit Ordnungstypen beschäftigt, die umkehrbar ($\alpha = \alpha^*$), berandet, isomer (alle offenen Intervalle sind vom selben Typus) und perfekt sind. Er nennt solche Typen in Anlehnung an BERNSTEINS Bezeichnung Ultrakontinua, wenn sie ω_1-Reihen und ω_1^*-Reihen enthalten; es gibt davon mindestens $\aleph_1$ Exemplare.[70]

Es ist hier nicht der Ort, HAUSDORFFS Arbeiten über geordnete Mengen zu besprechen; s. dazu insbesondere Band I dieser Edition. Ein Gesichtspunkt sei jedoch besonders hervorgehoben: Betrachtet man HAUSDORFFS Normaltypus η_α (dieser Band, S. 279) als topologischen Raum, versehen mit der Ordnungstopologie, so hat jede Umgebungsbasis eines Punktes x die Mächtigkeit $\aleph_\alpha$, da alle Punkte vom Charakter $(\omega_\alpha, \omega_\alpha^*)$ sind. Dieser Raum ist also insbesondere nicht metrisierbar. HAUSDORFF *mußte* demnach das metrische Konzept verlassen, wollte er die geordneten Mengen, versehen mit der Ordnungstopologie, mit unter seinen Raumbegriff subsumieren. Und dies wollte er gewiß[71], obwohl er sich zunächst auf die folgende kurze, aber sehr klare Bemerkung beschränkte:

> Wir werden uns später mehrfach überzeugen, daß die Gültigkeit der Umgebungsaxiome keineswegs ein Privileg der sphärischen Umgebungen ist. Hier genüge ein Beispiel, das zugleich zeigt, wie man die *geordneten* Mengen nach demselben Formalismus wie die Punktmengen behandeln kann: ist E eine geordnete, der Einfachheit wegen offene Menge (d. h. ohne erstes und letztes Element), so verstehe man unter einer Umgebung von x jede das Element x enthaltende *Mittelstrecke* E_a^b, d. h. für $a < x < b$ die Menge der Elemente y, für die $a < y < b$. Diese Umgebungen erfüllen unsere Axiome, während sich Entfernungen im allgemeinen nicht definieren lassen.[72]

Mit der Aufgabe, Begriffe und Methoden der Punktmengentheorie soweit als möglich auf Ordnungsstrukturen zu übertragen, haben sich im Zeitraum vor der Niederschrift der *Grundzüge* vor allem ungarische Forscher beschäftigt. F. RIESZ entwickelte eine Theorie der n-fach geordneten Mengen.[73] M heißt n-fach geordnet, wenn für ihre Elemente n Ordnungsrelationen definiert sind, wobei die i-te Ordnung mit $<_i$ bezeichnet werde. Das wichtigste Modell ist $M = M_1 \times \ldots \times M_n$ mit n geordneten Mengen. Ist $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $b = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ so ist $a <_i b$, falls $\alpha_i < \beta_i$ in der Ordnung von M_i. Ist M eine n-fach geordnete Menge, $a \in M$, und gibt es n Paare $b_1, c_1, \ldots b_n, c_n$ von Elementen von M, welche $b_i <_i a <_i c_i$ erfüllen, so heißt die Menge aller u mit $b_i <_i u <_i c_i$ eine Umgebung von a. Existieren solche Paare nicht für alle i, so ersetze man die fehlenden durch a selbst und erhält dann wenigstens einseitige Umgebungen. Im obigen Modellfall sind die Umgebungen die n-dimensionalen Intervalle, die ja schon WEIERSTRASS als Umgebungen im $\mathbb{R}^n$ benutzt hatte.

[70] BERNSTEINS Ultrakontinuum hat nicht alle diese Eigenschaften; seine Ausführungen in [Be 1905], S.153–155 sind fehlerhaft: [H 1906b], S. 166.

[71] Ein deutlicher Hinweis ist die Modifikation des Axioms (β) aus seiner Vorlesung von 1912 zum Axiom (B) in den *Grundzügen*, s. u., 3.1.

[72] [H 1914a], S. 214.

[73] [Ri 1905].

Riesz faßt seine Arbeit folgerichtig als Verallgemeinerung der „Analysis Situs der linearen Räume" auf.[74] Ihm ist auch vollkommen klar, daß jeder Rückgriff auf metrische Eigenschaften entfallen muß:

> Dabei können von den Methoden der Mengenlehre nur jene angewandt werden, welche ausschließlich mit dem Begriffe des Ordnungstypus operieren. Der Begriff der Distanz oder des Jordanschen "écart" wird zu entbehren sein, und es muß also der Begriff der Umgebung in jener allgemeineren Fassung übertragen werden, die auch schon sonstigen mengentheoretischen Untersuchungen geläufig ist.[75]

Riesz definiert nun für seine n-fach geordneten Mengen eine Reihe von Begriffen, welche das von Cantor eingeführte oben kurz skizzierte Begriffssystem verallgemeinert; dabei tut er den notwendigen Schritt über Cantor hinaus, Fundamentalreihen beliebiger Mächtigkeit zuzulassen. Ein Element von M, welches Häufungspunkt von M ist, heißt ein Hauptelement. Die Modifikationen gegenüber den Verhältnissen im $\mathbb{R}^n$ wird z. B. an folgenden Begriffsbildungen deutlich: Gibt es für ein Hauptelement a im Umgebungsfilter von a eine wohlgeordnete Teilmenge, deren Durchschnitt a ist, so heißt a zugänglich und die kleinste Mächtigkeit solcher wohlgeordneter Teilmengen die Zugänglichkeit von a. Ist diese Mächtigkeit $\aleph_0$, so heißt a einfach zugänglich. Im $\mathbb{R}^n$ liegt der sehr spezielle Fall vor, daß alle Punkte einfach zugängliche Hauptelemente sind. Ist $T \subseteq M$, so heißt die kleinste der Mächtigkeiten aller Fundamentalreihen aus T, die gegen a konvergieren, die Häufung der Teilmenge T in der Umgebung von a. Die Häufung ist höchstens gleich der Zugänglichkeit. Riesz betont, daß diese Mächtigkeiten „Invarianten der stetigen Abbildung" sind. Auch bei der Definition des Begriffes "Zusammenhang" kann sich Riesz nicht auf die Metrik stützen, wie Cantor das getan hatte. Er entwickelt ein Konzept, welches unabhängig von ihm später Lennes und Hausdorff wiederentdeckten (s. den Artikel *Zusammenhang*, dieser Band, S. 752).

Auch in der Arbeit von A. Haar und D. König[76], die von Hausdorff zitiert wird, allerdings mit falscher Jahresangabe, geht es um die Übertragung der Punktmengentheorie auf geordnete Mengen:

> Das eine Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, die Hauptsätze der Theorie der linearen Punkmengen auf die Theorie der einfach geordneten Mengen auszudehnen. Insbesondere kommen hier der Bolzano-Weierstraßsche, der Heine-Borelsche und der Cantor-Bendixsonsche Satz in Betracht.[77]

Das zweite Ziel besteht darin, die Sätze für lineare Punktmengen, d. h. für den Typus θ, ohne jeden Rückgriff auf die Metrik zu beweisen, d. h. sich nur auf Cantors oben angegebene Charakterisierung von θ zu stützen; es ist "die Reinheit der Methode", die dies erfordert.[78] Um zwei Beispiele von Resultaten von Haar und König zu geben, seien die Analoga des Satzes von Heine-Borel

[74] Ebd., S. 406.
[75] Ebd., S. 406.
[76] [Haar/Kö 1911].
[77] Ebd., S. 16.
[78] Ebd., S. 17.

und des CANTORschen Haupttheorems angeführt. Eine geordnete Menge M heißt absolut abgeschlossen, wenn sie ein erstes und ein letztes Element besitzt und keine Lücken hat. Für eine solche Menge gilt der Satz von HEINE-BOREL: Ist jedem Element $m \in M$ ein Intervall $m' \prec m \prec m''$ zugeordnet, so überdecken bereits endlich viele dieser Intervalle die Menge M. Das CANTORsche Haupttheorem besagte, daß für jede Teilmenge von $[0,1]$ die α-te Ableitung für ein gewisses $\alpha < \omega_1$ leer oder perfekt ist. Dies beruht auf der Separabilität von $[0,1]$. Der analoge Satz von HAAR und KÖNIG lautet: Ist in M eine Teilmenge T der Mächtigkeit $\aleph_\tau$ dicht, so ist für jede Teilmenge von M für ein $\alpha < \omega_{\tau+1}$ die α-te Ableitung leer oder perfekt.

In der Arbeit von H. HAHN[79], die HAUSDORFF auch zitiert hat, werden die Ergebnisse von HAAR und KÖNIG wesentlich klarer als bei diesen Autoren präsentiert; HAHNs eigenes darüber hinausgehendes Resultat ist die Ausdehnung der CANTORschen Theorie der Kohärenzen auf geordnete Mengen. So gilt z. B.: Ist in M eine Teilmenge T der Mächtigkeit $\aleph_\tau$ dicht, so ist für ein $\alpha < \omega_{\tau+1}$ die α-te Kohärenz leer oder insichdicht. Einen kurzen Überblick über die Entwicklung der Theorie der geordneten topologischen Räume bzw. der in solche Räume einbettbaren topologischen Räume gibt S. PURISCH in [Pu 1998]; dort findet man auch zahlreiche Literaturhinweise.

1.3 Die Auseinandersetzung mit dem Raumproblem

Um 1800 bedeutete "Raum" in der Mathematik den dreidimensionalen Raum der klassischen euklidischen Geometrie. Im Lauf des 19. Jahrhunderts entstanden verschiedene neue Geometrien. Durch die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrien und das Studium von „Mannigfaltigkeiten“ verschiedenster Art wurden im Laufe des 19. Jahrhunderts ganz neue mathematische Raumkonzepte denkbar. Deren Vielzahl motivierte nicht nur die Suche nach neuen vereinheitlichenden Gesichtspunkten, sondern sie warf auch das Problem der Beziehung von mathematischen und empirischen Raumvorstellungen in aller Schärfe auf.[80] HAUSDORFFs langjährige philosophische und mathematische Beschäftigung mit dem Problem des Raumes hat zweifellos zu seiner in den *Grundzügen* vorgestellten axiomatischen Fassung des Begriffs des topologischen Raumes beigetragen. Um diesen Beitrag etwas genauer einschätzen zu können, folgt hier ein knapper Abriß der diesbezüglichen Überlegungen HAUSDORFFs.[81] Im Zusammenhang mit der Niederschrift seines Buches *Das Chaos in kosmischer Auslese* begann HAUSDORFF/MONGRÉ offenbar auch, sich für einen weiteren Aspekt der Mengenlehre zu interessieren, nämlich für die mit mengentheoretischen Mitteln bildbaren Raumkonzepte und dafür charakteristische Eigenschaften wie Zusammenhang und Stetigkeit. Dieses Interesse stand zunächst allerdings ganz im Dienst des philosophischen Zieles, das sich der Autor dieses Buches im Hinblick auf den Begriff des Raumes gesetzt hatte: Es sollte mit einem neuen Argument die bereits von KANT aufgestellte These be-

[79][Hahn 1913].

[80]Zusammenfassende monographische Darstellungen sind [La/Ro 1996], [Scho 1980] und [To 1984]. Zum Riemann-Helmholtz-Lieschen Raumproblem s. [Freu 1957].

[81]Dieser Themenkomplex wird in Band VI dieser Edition ausführlich behandelt.

wiesen werden, daß es sinnlos ist, von einem unabhängig von aller Erfahrung bestehenden, "transzendenten" Raum zu sprechen.[82] Die Struktur des Arguments faßte Hausdorff/Mongré folgendermaßen zusammen:

> Man denkt sich zunächst, wie der Realist, ein getreues Urbild des empirisch gegebenen Raumes als transzendent real und sucht es alsdann so stark zu variiren, wie es ohne Zerstörung der empirischen Wirkung gehen will.[83]

Wie im Kontext des analogen Arguments gegen die Existenz einer transzendenten Zeit ist auch hier die Idee des Arguments mathematisch. Hausdorff/Mongré nimmt an, daß sowohl der angenommene transzendente Raum als auch der empirische Raum als Mengen von Punkten aufgefaßt werden können, denen eine gewisse geometrische Struktur zukommt. Als Hypothese eines Widerspruchsbeweises nimmt er dann an, daß beide Räume dieselbe mathematische Struktur besitzen und daher miteinander identifiziert bzw. durch eine strukturerhaltende Abbildung miteinander in Beziehung gesetzt werden können. Darauf soll schrittweise der Nachweis folgen, daß eine Modifikation dieser Beziehung durch immer weiter von der identischen Abbildung entfernte Selbstabbildungen des transzendenten Raumes denkbar ist, ohne daß empirisch feststellbare Effekte einträten. In letzter Konsequenz möchte Hausdorff/Mongré zeigen, daß eine *völlig beliebige* Abbildung vom transzendenten in den empirischen Raum vorliegen könnte.[84] Da diese Möglichkeit besteht, so schließt er, kann keinerlei Rückschluß von unseren räumlichen Erfahrungen auf den transzendenten Raum gezogen werden. Anders und der Hausdorff/Mongréschen Phantasie vielleicht angemessener formuliert: Der transzendente Raum könnte eine völlig beliebige Struktur besitzen; deshalb handelt es sich dabei um einen erkenntnistheoretisch wertlosen Begriff.

Dieses hochgesteckte Argumentationsziel konnte Hausdorff/Mongré aber nicht erreichen, wie er selbst einräumte.[85] Im Text behandelte er lediglich eine Reihe von Transformationen des (transzendenten) Raumes, die aus den zeitgenössischen Debatten um die nichteuklidische Geometrie bekannt waren.[86] So diskutierte er eine simultane Verkleinerung oder Vergrößerung aller Längen (d. h. eine homogene Transformation des euklidischen Raumes) sowie Verzerrungen, die (mindestens in einem Gebiet, in welchem das Urbild des uns empirisch zugänglichen Raumbereichs liegt) zu einer nichteuklidischen geometrischen Struktur des transzendenten Raumes führen würde. Dabei deutete Hausdorff auch die Möglichkeit an, „irgendein Gebilde variablen Krümmungsmaßes" für den transzendenten Raum in Betracht zu ziehen. Im vorliegenden Zusammenhang sind jedoch die abschließenden Bemerkungen des Kapitels, in denen Hausdorff/Mongré auch den Bereich der (Riemannschen) Mannigfaltigkeiten überschritt, am interessantesten. Hier sprach er weitere "Verallgemeinerungen" der mathematischen Struktur des Raumes an, die sich auf to-

[82] Vgl. Band VII dieser Edition.
[83] [H 1898a], S. 73.
[84] Ebd., S. 83.
[85] Ebd., S. 83.
[86] Ausführlicher hierzu in den Kommentaren in Band VI und VII.

pologische Eigenschaften desselben bezogen. Dabei rückte vor allem CANTORS Mengenlehre ins Blickfeld:

> Auch an der bisher nicht angetasteten Voraussetzung der *Stetigkeit* von Raum und Zeit ließen sich möglicherweise Verallgemeinerungen anbringen; es ist eine durch G. CANTOR's Untersuchungen angeregte Frage, ob nicht an Stelle des gewöhnlich angenommenen Punktcontinuums etwa eine *überall dichte* Punktmenge oder ein *Semicontinuum* (ein Continuum z. B., aus dem gewisse continuirliche oder überall dichte Punktmengen entfernt sind) die gleichen Dienste thäte. Aber die Continuität, auf physischem wie mathematischem Gebiete, ist ein schwieriges Problem, über das die Discussion noch nicht einmal recht angefangen hat – geschweige denn beendet und um Mittheilung ihrer Ergebnisse zu befragen wäre.[87]

Man kann diese Worte als die Formulierung eines Problems ansehen, auf welches die spätere Definition topologischer Räume eine Antwort gab: Wie können genau jene Aspekte des Raumbegriffs charakterisiert werden, die sich auf dessen Kontinuitätseigenschaften beziehen? Zunächst hatte dieses Problem freilich zwei Seiten: Einerseits betraf es die Imagination möglicher Raumformen, deren Stetigkeitseigenschaften von jenen des Euklidischen Raumes abwichen, im Zuge der immer weiter gehenden „Befreiung von den Schranken des euklidischen Denkens".[88] Wie die erwähnten Beispiele zeigen, dachte HAUSDORFF dabei zunächst hauptsächlich an lokale Eigenschaften. Andererseits kam es auf die scharfe begriffliche Umgrenzung der Stetigkeitseigenschaften von Räumen an – wie waren sie definitorisch von geometrischen oder anderen Eigenschaften des Raumes zu trennen?

Die Lektüre von DAVID HILBERTS *Grundlagen der Geometrie* und die dadurch angeregte Beschäftigung mit der axiomatischen Methode ist in der nächsten Gruppe von Texten, in denen HAUSDORFF sich mit dem Raumproblem auseinandersetzte, deutlich spürbar.[89] In diesen Texten, zu denen vor allem HAUSDORFFS Leipziger Antrittsvorlesung *Das Raumproblem* sowie eine im Wintersemester 1903/04 gehaltene Vorlesung über *Zeit und Raum* gehören.[90], steht nicht mehr die philosophische Frage nach der Struktur bzw. Realität des transzendenten (oder, wie HAUSDORFF nun lieber formulierte, des objektiven oder absoluten) Raumes im Vordergrund. Vielmehr suchte HAUSDORFF jetzt den Spielraum möglicher mathematischer, axiomatisch gefaßter Raumkonzepte zu bestimmen, die mit unseren räumlichen Erfahrungen verträglich sind.

Eine „Freiheit der Wahl" zwischen Hypothesen über den mathematischen Raum bestand nach HAUSDORFF in drei Hinsichten:

---

[87][H 1898a], S. 121–122.

[88]Ebd., S. 121.

[89]Zu HAUSDORFFS Eintreten für den "Formalismus" vgl. ausführlicher im Punkt 2.7 der Einleitung, dieser Band, S. 53–55. Daß HAUSDORFF sich zu den „aufrichtigen Bewunderern" der HILBERTschen Festschrift zählte, geht aus einem Brief hervor, den er am 12. 10. 1900 an HILBERT sandte. Die Lektüre der *Grundlagen der Geometrie* habe, so HAUSDORFF, den „höchstgesteigerten Kriticismus... als philosophische Grundstimmung" hinterlassen. NL HILBERT, Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, Sign.: Hilbert 136.

[90][H 1903a] und NL HAUSDORFF: Kapsel 24: Fasz. 71. Beide Texte werden im Band VI dieser Edition abgedruckt.

> [...] durch den Spielraum des Denkens, den Spielraum der Anschauung, den Spielraum der Erfahrung.[91]

Der Spielraum des Denkens war lediglich durch die logische Forderung der Widerspruchsfreiheit begrenzt; er konnte durch die axiomatische Methode ausgelotet werden. Mit dem Spielraum der Anschauung war das individuell verschiedene Vermögen der Mathematiker angesprochen, „in phantastischer Umbildung und Metamorphose“ die alltägliche Raumanschauung abzuwandeln.[92] Der Spielraum der Erfahrung schließlich setzte der Bildung mathematischer Raumkonzepte die engsten Grenzen. Er bestand nur insoweit, als mathematische Raumkonzepte mit den vorhandenen räumlichen Erfahrungen im Rahmen der Genauigkeit von Messungen übereinstimmten. Zur Charakterisierung dieses Zusammenspiels von mathematischer Begriffsbildung und empirischer Geltung griff HAUSDORFF ein Stichwort auf, das er bereits in seinem *Chaos in kosmischer Auslese* eingeführt hatte. Die Antwort auf das Raumproblem, die er zu geben versuchte, zeichnete sich durch einen „besonnenen Empirismus“ aus.[93] Obwohl der Sinn eines wissenschaftlichen Raumbegriffs letzten Endes in seiner Beziehung auf räumliche Erfahrungen liegt, so HAUSDORFF, muß damit gerechnet werden, daß verschiedene axiomatische Festlegungen des Raumbegriffs möglich sind, die sich voneinander und insbesondere von der gewöhnlichen, euklidischen Raumvorstellung unterscheiden, sofern nur die Abweichungen von letzterer sich durch Messungen (vorläufig) nicht nachweisen lassen.

In dieser veränderten Perspektive diskutierte HAUSDORFF erneut die sich bei einer Variation der Eigenschaften des gewöhnlichen Raumes ergebenden mathematischen Raumbegriffe. Deutlicher als früher unterschied er dabei zwischen verschiedenen mathematischen Schichten des Raumbegriffs.[94] Nacheinander beschrieb er Raumformen, die denkbar wurden, wenn schrittweise darauf verzichtet wurde, den Raum

> [...] als Raum verschwindender Krümmung, als Raum freier Beweglichkeit, als Raum einfachen Zusammenhanges, als dreidimensionalen stetigen Raum [...][95]

zu charakterisieren.

Im ersten Schritt rückten die klassischen nichteuklidischen Alternativen zum euklidischen Raum in den Blick. Im zweiten Schritt ging HAUSDORFF auf die HELMHOLTZsche Idee ein, die geometrischen Konsequenzen eines geeignet mathematisch präzisierten Postulats der freien Beweglichkeit starrer Körper zu untersuchen und auf diese Weise das Spektrum möglicher Raumformen auf die bekannten nichteuklidischen Fälle einzugrenzen. Interessanterweise verwies HAUSDORFF für die mathematische Rechtfertigung dieser Idee nicht nur auf die analytische Literatur des 19. Jahrhunderts (insbesondere auf SOPHUS LIEs entsprechende Arbeiten), sondern auch auf den kurz vorher publizierten Neuansatz

[91] [H 1903a], S. 3.

[92] Ebd., S. 6.

[93] Ebd., S. 18 ff.

[94] Allerdings warnte HAUSDORFF auch davor, diese Isolierung zu weit zu treiben: „Man zerstört das ganze Gewebe, wenn man einen einzigen Faden herauszieht.“ [H 1903a], S. 7.

[95] [H 1903a], S. 7.

HILBERTS[96], ohne allerdings näher auf diese Arbeit einzugehen. Insbesondere griff er HILBERTS Anregung, die Ebene durch geeignete Eigenschaften eines Systems von Umgebungen der Punkte topologisch zu charakterisieren, zunächst *nicht* auf.[97] Verzichtete man auf das Postulat der freien Beweglichkeit, wurden „Räume variablen Krümmungsmaßes“ denkbar, und HAUSDORFF wies auch auf die bereits von RIEMANN angedeutete Möglichkeit von Räumen hin, deren Metrik nicht von einer RIEMANNschen Metrik stammt.

Bis zu diesem Punkt betrafen die Ausführungen HAUSDORFFS metrische und differentialgeometrische Eigenschaften des Raumes, während dessen topologische Eigenschaften unangetastet blieben. Die weiteren Schritte der Diskussion betrafen Abweichungen vom topologischen Typ des euklidischen Raumes. Dabei diskutierte HAUSDORFF zunächst abweichende „Zusammenhangsverhältnisse im ganzen einer Raumform“ bei festgehaltener euklidischer oder nichteuklidischer Geometrie in begrenzten Bereichen. Hier ergaben sich also jene Räume konstanter Krümmung, die W. KILLING unter dem Namen der CLIFFORD-KLEINschen Raumformen zuerst ausführlich untersucht hatte, als Alternativen zum euklidischen Raum.[98] Mit Blick auf seine eigene spätere Theorie topologischer Räume ist auffallend, daß HAUSDORFF dieses Thema noch ganz in der Terminologie des späten 19. Jahrhunderts (d. h. jener KLEINS und KILLINGS) diskutierte. Vorsichtig interpretierend kann man sagen, daß HAUSDORFF unter “Zusammenhangsverhältnissen” jene globalen topologischen Eigenschaften eines Raumes verstand, die sich durch die Eigenschaften eines Systems von Fundamentalwegen (ggf. repräsentiert durch geodätische Kurven) fassen ließen. Zur Kennzeichnung solcher Eigenschaften verwendete HAUSDORFF sowohl den Ausdruck „im Sinne der Analysis situs“ als auch, in Anführungszeichen, “topologisch”.[99] Der Name POINCARÉS und die entsprechenden technischen Ausdrücke wie Fundamentalgruppe oder Homologie fallen allerdings weder an dieser Stelle noch in den anderen Texten dieser Zeit, deshalb auch die gewählte Umschreibung.[100] Ebensowenig deutete HAUSDORFF eine mengentheoretische Fassung des Zusammenhangsbegriffs an.[101]

Erst im nächsten Schritt, bei der Diskussion der Dimensionszahl und der “Stetigkeit” des Raumes, führte HAUSDORFF die Beziehung zur Mengenlehre explizit ein. Er zitierte CANTORS Sätze über die Möglichkeit, Punktkontinua verschiedener Dimension bijektiv, aber unstetig, oder stetig, aber nicht bijektiv aufeinander abzubilden, und wies darauf hin, daß dadurch die Eigenschaft des Raumes, stetig zu sein, und die Zahl der ihm zugeschriebenen Dimensio-

---

[96] [Hi 1902], [Hi 1903a].

[97] Näheres hierzu unter 2.1.

[98] Vgl. insbesondere [Ki 1893], ein Buch, das auch HAUSDORFF als Quelle nannte.

[99] [H 1903a], S. 12.

[100] HAUSDORFF verwies in seiner Antrittsvorlesung nur einmal in einer Anmerkung auf POINCARÉS Arbeiten über Fuchssche Gruppen, als Beleg dafür, daß die nichteuklidischen Geometrien auch in der Funktionentheorie Anwendung fanden; vgl. [H 1903a], Anm. 14.

[101] Hinweise auf einen solchen Zusammenhangsbegriff, wie sie in der Anmerkung im Anhang der *Grundzüge* zu S. 244 genannt werden (dort verweist HAUSDORFF auf CANTOR, JORDAN, SCHOENFLIES und STUDY; s. diesen Band, S. 558), finden sich im Korpus der Texte zum Raumproblem noch nicht.

nen miteinander in Beziehung standen. Der Begriff der Stetigkeit selbst wurde von HAUSDORFF allerdings nicht weiter erläutert. Wie gleich deutlicher werden wird, hatte er wahrscheinlich eine Verallgemeinerung der DEDEKINDschen Stetigkeitsvorstellung für reelle Zahlen im Sinn. Schließlich erweiterte HAUSDORFF seine Andeutungen aus *Das Chaos in kosmischer Auslese*, daß der Raum statt eines gewöhnlichen dreidimensionalen Kontinuums auch eine ganz andersartige Punktmenge sein könnte:

> Dedekind und Hilbert haben abzählbare Punktmengen angegeben, die den Raum „überall dicht“ wie ein unendlich feiner Staub, aber doch nicht kontinuierlich erfüllen; Punktmengen, innerhalb deren trotzdem im Wesentlichen die euklidische Geometrie gilt. Unser wirklicher Raum könnte eine solche Punktmenge sein, oder er könnte umgekehrt durch Weglassung einer solchen Punktmenge aus dem Kontinuum entstehen; in einem solchermaßen überall durchlöcherten, schwammartigen Raume wäre sogar noch stetige Bewegung möglich.[102]

Der Durchgang durch die verschiedenen mathematisch denkbaren Raumformen diente zwei Zwecken. Zum einen wollte HAUSDORFF jene Eigenschaften des Raumes, die in dessen mathematischer Beschreibung Gegenstand einer axiomatischen Festsetzung sein mußten, durch Vergleich mit den möglichen Alternativen genauer bestimmen. Zum anderen sollte die Übersicht auch als Warnung dienen, sich über die empirische Rechtfertigung der angenommenen Raumeigenschaften nicht zu täuschen. HAUSDORFFS „besonnener Empirismus“ schloß ausdrücklich die Forderung ein, sich einen Überblick über *alle* in den Grenzen der Erfahrung möglichen mathematischen Raumkonzepte zu verschaffen. Der Aufbau der Hausdorffschen Antrittsvorlesung macht klar, daß er die topologische Schicht des Raumkonzepts für grundlegend hielt. Innerhalb derselben waren es wiederum die lokalen, mengentheoretisch faßbaren Aspekte, die ihn vermutlich am meisten interessierten und mit denen er seine Übersicht schloß. Hier unterscheidet HAUSDORFF sich deutlich von anderen Mathematikern, die vor oder um 1900 über das Raumproblem nachdachten. So wurde in den Diskussionen des späten 19. Jahrhunderts fast immer unterstellt, daß der Raum im Kleinen durch Gebiete des $\mathbb{R}^3$ koordinatisiert werden kann, und selbst POINCARÉ bezweifelte nie, daß der Raum ein Kontinuum (eine stetige Mannigfaltigkeit) sei. Freilich ging HAUSDORFF noch nicht so weit, einen axiomatischen Rahmen zu entwerfen, innerhalb dessen die topologische Schicht des Raumbegriffs selbständig gefaßt werden konnte.

Dies zeigt sich sehr deutlich auch an der Vorlesung *Zeit und Raum*, die HAUSDORFF im Wintersemester 1903/1904 in Leipzig hielt. In dieser Vorlesung, die in vieler Hinsicht die Überlegungen der Antrittsvorlesung erweiterte, ging es HAUSDORFF um eine axiomatische Beschreibung der wissenschaftlichen Begriffe der (gewöhnlichen, linearen) Zeit und des (gewöhnlichen, euklidischen) Raumes im Sinne seines „besonnenen Empirismus“. Im vorliegenden Kontext

---

[102] [H 1903a], S. 13. Gemeint waren die Menge aller Punkte mit algebraischen Koordinaten (DEDEKIND, [D 1888/1967], S. VII) bzw. aller mit Zirkel und Lineal aus eine Einheitsstrecke konstruierbaren Punkte (HILBERT, [Hi 1899], §9).

sind vor allem HAUSDORFFS Ausführungen über die Stetigkeitseigenschaften von Zeit und Raum wichtig.

Als erstes diskutierte er die Stetigkeit der Zeit. Nachdem er seine Hörer auf die Unzulänglichkeit älterer Umgangsweisen mit dem Begriff der Stetigkeit aufmerksam gemacht hatte, stellte er eine zweistufige Konzeption der Stetigkeit vollständig geordneter Mengen vor, um sie auf die Zeit anzuwenden. Daß die Zeit, „die Form des Nacheinander“[103] allen Geschehens, eine vollständig geordnete Menge $\mathcal{T}$ unteilbarer Zeitmomente sei, war Inhalt eines ersten Axioms.[104] Die beiden folgenden Axiome charakterisierten nun die gewünschte Stetigkeit der Zeit. Dieselbe umfaßte auf der ersten Stufe die “Überalldichtheit” im Sinne der Theorie geordneter Mengen, auf der zweiten Stufe die von HAUSDORFF als “Dedekind'sche Stetigkeit” bezeichnete Lückenlosigkeit (jede Zerlegung in eine Anfangs- und eine Endstrecke ist ein Schnitt). Durch die Diskussion verschiedener Ordnungstypen, die den gestellten Forderungen genügen, zeigte er außerdem, daß das Konzept der empirischen Zeit damit noch nicht ausreichend bestimmt war.[105] HAUSDORFF forderte deshalb weiterhin die Homogenität (alle Strecken haben den gleichen Ordnungstypus). Ferner verlangte er die Existenz einer mit der Aneinandersetzung verträglichen Gleichheitsrelation auf den Zeitstrecken, derart, daß zu jeder Zeitstrecke AB und jedem Moment P zu AB gleiche Zeitstrecken OP und PQ existieren. Er behauptete dann ohne Beweis, daß aus den aufgestellten Forderungen insbesondere das Archimedische Axiom folge.[106] Dies reichte aus, um “Zeitscalen”, d. h. ordnungserhaltende und die Addition von Zeitstrecken respektierende Bijektionen $\tau := \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ zu konstruieren, wobei je zwei solcher Skalen τ, τ' linear äquivalent waren, d. h. es galt $\tau' = \alpha\tau + \beta$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\alpha \neq 0$.[107]

Auf diese Weise fixierte HAUSDORFF den Begriff der empirischen Zeit durch eine Axiomatik, die sich eng an HILBERTS *Grundlagen der Geometrie* und dessen ergänzender axiomatischer Charakterisierung des Begriffs der reellen Zahlen orientierte.[108] Dabei strich HAUSDORFF klar heraus, daß sich seiner Auffassung nach die Spezifizierung des Zeitbegriffs auf die Untersuchung von Ordnungsstrukturen transfiniter Mengen stützen sollte. Auch die Stetigkeit der Zeit wurde folglich diesem Rahmen eingeordnet. Ganz im Sinne seiner methodologischen Position des „besonnenen Empirismus“ machte HAUSDORFF außerdem darauf aufmerksam, daß keines der beiden aufgestellten Stetigkeitsaxiome durch die Erfahrung erzwungen wird. Die Überalldichtheit der Zeitpunkte war wegen der „Ungenauigkeit unserer Zeitmessung“ fraglich; die Forderung der DEDEKIND-Stetigkeit beruhte außerdem auf der nominalistischen Erweiterung einer überall dichten Menge durch den DEDEKINDschen Schnitten zugeordnete neue Elemen-

[103] Vorlesung *Zeit und Raum*, NL HAUSDORFF: Kapsel 24: Fasz. 71, Bl. 7.

[104] Ebd., Bl. 9.

[105] Ebd., Bl. 16 ff.

[106] Ebd., Bl. 22 ff. Ein undatierter Beweis dieser Behauptung findet sich in NL HAUSDORFF: Kapsel 49: Fasz. 1078, Bl. 8.

[107] Eine detaillierte Darstellung der Hausdorffschen Axiomatik der Zeit gibt [Scho 1996], S. 109–113.

[108] [Hi 1900]. Ausführlicher wiederum in [Scho 1996].

te.[109] Beide Axiome waren also Konventionen, wenn auch empirisch plausible.

Ohne Zweifel war HAUSDORFF in dieser Phase die ordnungstheoretisch gefaßte Stetigkeit der *Zeit* ungleich wichtiger als jene des *Raumes*. Dies wird auch durch einige undatierte, vermutlich jedoch zeitlich naheliegende Notizen in NL HAUSDORFF: Kapsel 49: Fasz. 1078 bestätigt. In einer dieser Notizen diskutierte HAUSDORFF die Möglichkeit eines aperiodischen Weltgeschehens, in welchem ein einziger Massenpunkt in stetiger Zeit zwischen lediglich zwei Raumpunkten hin- und herspringt; in einer weiteren Notiz deutete er die Möglichkeit an, die Stetigkeit des Raumes über den Begriff der Bewegung auf die Stetigkeit der Zeit zu reduzieren.[110] Auch in der Vorlesung über *Zeit und Raum* ging HAUSDORFF bei der Diskussion der Stetigkeit des Raumes über das ordnungstheoretische Stetigkeitskonzept *nicht* hinaus. Obwohl er dem traditionellen Topos, daß die „Zeit die Form des Nacheinander" sei, den entsprechenden Topos beigesellte, nach welchem „der Raum die Form des Nebeneinander" sei[111], findet sich in diesem Text noch keine axiomatische Fassung eines auf der Idee der Nachbarschaft von Punkten aufbauenden Stetigkeitsbegriffs. Er verwies lediglich summarisch auf die entsprechende Axiomengruppe in HILBERTS *Grundlagen der Geometrie*.[112] Da aber gerade diese in der ersten Auflage unbefriedigend gestaltet war (es fehlte ein Vollständigkeitsaxiom), muß wohl davon ausgegangen werden, daß HAUSDORFF in diesem Kontext am ehesten an eine Analogie der folgenden Art zur Stetigkeit der Zeit dachte: Jede Gerade ist in ihrer durch die geometrischen Anordnungsaxiome gegebenen kanonischen Ordnung eine überall dichte und DEDEKIND-stetige Punktmenge.[113] Ähnliche Aussagen folgen dann für eine Reihe weiterer geometrischer Objekte, die auf kanonische Weise geordnet werden können, wie Kurven, Geradenbüschel usw.[114]

---

[109] NL HAUSDORFF: Kapsel 24: Fasz. 71, Bl. 15. HAUSDORFF erläuterte DEDEKINDS philosophische Position recht ausführlich und zog ausdrücklich eine Parallele zum mittelalterlichen Begriffsnominalismus.

[110] NL HAUSDORFF: Kapsel 49: Fasz. 1078, Bl. 13 ff und Bl. 10. Dort heißt es: „Zunächst giebt es im leeren Raume noch keine Stetigkeit, keine Anordnung der Punkte. Die Bewegung eines ersten materiellen Punktes A ist also nicht in dem Sinne beschränkt, daß sie in einem fertig vorliegenden Raum stetig erfolgen müsste, sondern sie constituirt erst den Begriff Stetigkeit, d. h. wir nennen diejenige Folge von Lagen des Punktes A, die im Laufe der Zeit realisiert wird, eine stetige Bahn. [...] Ein erster Körper, evtl. zwei oder mehr, ist also nothwendig, um die Stetigkeit des Raumes erst zu definiren; dass aber dann alle übrigen Körper stetige Bahnen beschreiben, ist eine Erfahrungsthatsache, die niemand a priori construiren kann." Soweit wir wissen, führte HAUSDORFF diesen Gedanken allerdings mathematisch nicht weiter aus.

[111] NL HAUSDORFF: Kapsel 24: Fasz. 71, Bl. 7.

[112] Ebd., Bl. 30 ff.

[113] Diese Vermutung wird durch eine weitere undatierte, aber thematisch eng verwandte Notiz gestützt, in welcher HAUSDORFF die Stetigkeitsvorstellungen DEDEKINDS und CANTORS als „Stetigkeit des Raumes im modernen Sinne" bezeichnete (NL HAUSDORFF: Kapsel 49: Fasz. 1078, Bl. 12.)

[114] Eine weitere Notiz aus Fasz. 1078, die noch einmal den Zusammenhang von Stetigkeit und Bewegung diskutiert, schränkt sich ausdrücklich auf geradlinige und kreisförmige Bewegungen ein. Der Fall eines Geradenbüschels taucht in der Vorlesung bei der Diskussion der Parallelen in der hyperbolischen Geometrie einmal auf (NL HAUSDORFF: Kapsel 24: Fasz. 71, Bl. 45). Im Nachlaß findet sich allerdings auch ein kurzes Fragment über die Analyse von Zeit und

Nach 1904 nahm HAUSDORFF in gedruckten Texten nicht mehr ausführlich Stellung zum philosophischen Raumproblem, obwohl sein Interesse daran nicht erlosch, wie sich durch eine Reihe brieflicher Äußerungen und handschriftlicher Notizen belegen läßt.[115] Möglicherweise veranlaßten ihn die relativitätstheoretischen Beiträge EINSTEINS und die dadurch entstandene Notwendigkeit, die Frage von Raum und Zeit grundsätzlich neu zu durchdenken, zu dieser Zurückhaltung.

Damit kann ein gewisses Fazit über den Beitrag, den die philosophische und mathematische Auseinandersetzung HAUSDORFFS mit dem Raumproblem zur Konzeption eines axiomatischen Begriffs topologischer Räume lieferte, gezogen werden. Bereits *Das Chaos in kosmischer Auslese* und stärker noch die Leipziger Antrittsvorlesung von 1903 dokumentieren ein Interesse an den topologischen Aspekten des Raumbegriffs. Dieses Interesse vereinigte eine Neigung zur Imagination "nichteuklidischer" lokaler topologischer Strukturen des Raumes mit dem Bewußtsein, daß das "Problem der Kontinuität" mathematisch noch nicht endgültig geklärt war. HAUSDORFFS zu dieser Zeit bestehende Vorstellungen, wie die Stetigkeit des Raumes axiomatisch zu fassen sei, werden in der Vorlesung *Zeit und Raum* des Wintersemesters 1903/1904 am deutlichsten. Dort war ein ordnungstheoretisches Konzept der Stetigkeit leitend, das zunächst für die Zeit entwickelt und dann in naheliegender Weise auf den Raum (bzw. die in ihm auf natürliche Weise geordneten Gebilde wie Geraden usw.) übertragen wurde. Dagegen findet sich in den Texten, die HAUSDORFFS Beschäftigung mit dem Raumproblem festhalten, bis 1904 noch *keine* Spur eines Versuchs, die topologische Schicht des Raumbegriffs gestützt auf die Eigenschaften von Umgebungssystemen definitorisch zu umgrenzen. Für diesen entscheidenden Schritt bedurfte es offenbar einer weiteren, unabhängigen Anregung.

In diesem Zusammenhang ist auch ein Vergleich mit der kurze Zeit später erschienenen Arbeit von F. RIESZ *Die Genesis des Raumbegriffs*[116] aufschlußreich. Auch RIESZ, der u. a. in Göttingen studiert und enge Beziehungen zu Pariser Mathematikern geknüpft hatte, suchte mit dieser Arbeit einen Beitrag zur Klärung des Raumproblems zu leisten. Wie HAUSDORFF war er von der axiomatischen Methode HILBERTS tief beeindruckt. Sein philosophischer Ausgangspunkt dagegen war nicht die Kritik der Transzendentalphilosophie, sondern die psychologisch-genetische Theorie der Herausbildung des Raumbegriffs, die POINCARÉ in seinen Beiträgen zum Raumproblem vorgestellt hatte.

Raum, das Zeit*strecken* und Raum*teile* (Volumina) miteinander vergleicht; diese Überlegung wird jedoch nicht auf das Stetigkeitskonzept bezogen. (NL HAUSDORFF: Kapsel 49: Fasz. 1081, Bl. 3–4v.)

[115] So verfaßte HAUSDORFF 1917 ein längeres populär gehaltenes Manuskript *Das Relativitätsprinzip*, vermutlich eine Vortragsausarbeitung (NL HAUSDORFF: Kapsel 44: Fasz. 796). Auch dieses Manuskript wird im Band VI dieser Edition abgedruckt. Ferner wechselte HAUSDORFF in den Jahren 1919 und 1920 Briefe mit MORITZ SCHLICK anläßlich von dessen Monographie über *Raum und Zeit in der gegenwärtigen Physik*. Weitere Hinweise auf entsprechendes Material in HAUSDORFFS Nachlaß finden sich im Kommentar zu Band VI.

[116] Die Arbeit wurde im ungarischen Original im Januar 1906 der ungarischen Akademie der Wissenschaften vorgelegt; eine deutsche Übersetzung erschien im Jahre 1907 ([Ri 1907a]). S. dazu auch [Jo 1981], S. 114.

Genauer gesagt gab er eine axiomatische Rekonstruktion zweier Schlüsselbegriffe dieser Theorie, des „physikalischen Kontinuums“ und des „mathematischen Kontinuums“. Zur Axiomatisierung stützte er sich dabei einerseits auf die Mengenlehre CANTORscher Prägung, andererseits auf die funktionalanalytisch motivierten Ansätze zu einer Theorie abstrakter Räume in den frühen Arbeiten M. FRÉCHETs. Auf diese Weise gelangte RIESZ zu einem Begriff des „mathematischen Kontinuums“, in dessen Zentrum eine axiomatische Fassung der CANTORschen Mengenableitung bzw. des Begriffs des Häufungspunktes einer Menge stand.[117] HAUSDORFF scheint diesen Versuch eines axiomatischen Zugangs zum Raumproblem, von dem sich später zeigte, daß er mathematisch mit seiner eigenen Definition topologischer Räume verwandt war, bei der Abfassung der *Grundzüge* noch nicht gekannt zu haben.

1.4 Die Herausbildung erster abstrakter Raumkonzepte

Axiomatisch definierte, in der Sprache der Mengenlehre präzise formulierte Raumbegriffe von großer Allgemeinheit entstanden zu Beginn des 20. Jahrhunderts. Die Bemühungen zahlreicher Mathematiker, die Analysis solide zu begründen, die Grenzen ihres Wirkungsbereichs zu erweitern und analytische Sachverhalte durch geometrische Darstellungsweisen einsehbar zu machen, die RIEMANNschen Visionen und die sich im Zusammenhang damit lebhaft entwickelnde “Analysis Situs”, die von CANTOR geschaffene Sprache der Mengenlehre und seine Theorie der Punktmengen und schließlich die von HILBERT 1899 in seinen *Grundlagen der Geometrie*[118] wiederbelebte und verfeinerte axiomatische Methode schufen die Basis für die Entwicklung einer Theorie abstrakter Räume und stetiger Abbildungen, kurz: der allgemeinen Topologie.

Es waren vor allem Forscher im Umfeld der entstehenden Funktionalanalysis, die erste abstrakte Raumkonzepte schufen.[119] Einen Hinweis auf unendlichdimensionale Räume findet man schon in RIEMANNS Habilitationsvortrag *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*[120] ; es heißt dort:

> Es giebt indess auch Mannigfaltigkeiten, in welchen die Ortsbestimmung nicht eine endliche Zahl, sondern entweder eine unendliche Reihe oder eine stetige Mannigfaltigkeit von Grössenbestimmungen erfordert. Solche Mannigfaltigkeiten bilden z. B. die möglichen Bestimmungen einer Function für ein gegebenes Gebiet, die möglichen Gestalten einer räumlichen Figur u. s. w.[121]

Erste Sätze, die man heute zur Topologie in Funktionenräumen rechnet, stammen aus der italienischen analytischen Schule. Die Variationsrechnung legt es nahe, allgemein “Funktionale” zu betrachten, d. h. Funktionen zu studieren,

[117] Genaueres zu RIESZ Beiträgen s. u. unter 1.4 und 3.4.
[118] [Hi 1899].
[119] Zur Entstehung der Funtionalanalysis s. z. B. [Ber 1966/67], [Mo 1973], [Die 1981], [SiS 1982], [Bi/Kr 1984], [Kr 1997].
[120] [R 1854b/1867].
[121] Ebd., S. 276. Man kann nur immer wieder RIEMANNS geradezu prophetischen Weitblick bewundern. S. dazu auch [Scho 1999].

deren Argumentbereich keine Zahlenmenge, sondern eine gewisse Klasse von Funktionen ist. V. VOLTERRA begann etwa 1883[122] mit einem systematischen Studium solcher Funktionale. Er nannte sie "Linienfunktionen" (funzioni di linee)[123], definierte für sie den Begriff der Ableitung und versuchte sogar, in Analogie zur RIEMANNschen Funktionentheorie eine Linien-Funktionentheorie aufzubauen. Für die Anwendungen blieb sein Bemühen zunächst ohne Resultate, aber als Programm weiterer Forschungen blieb die Aufgabe bestehen, die Definitionsmengen der Linienfunktionen zu analysieren und geeignet zu wählen, d. h. modern gesprochen, Funktionenräume und ihre topologischen Eigenschaften zu untersuchen. Einen ersten Schritt in diese Richtung war 1884 schon G. ASCOLI gegangen, indem er versucht hatte, den Satz von BOLZANO-WEIERSTRASS auf Funktionenmengen auszudehnen. Er fand für eine Menge M in $[a, b]$ stetiger Funktionen: Sind die Funktionen von M gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig, so kann man aus jeder Folge $\{f_n\}, f_n \in M$ eine konvergente Teilfolge auswählen. An VOLTERRA und ASCOLI knüpfte C. ARZELÀ an[124], motiviert durch die bekannt gewordene Kritik am DIRICHLETschen Prinzip. Ist M eine Menge in $[a, b]$ stetiger Funktionen, so definiert ARZELÀ den Begriff "Grenzfunktion von M" folgendermaßen: g heißt Grenzfunktion von M, wenn zu $\varepsilon > 0$ unendlich viele Funktionen $f \in M$ existieren mit $g(x) - \varepsilon < f(x) < g(x) + \varepsilon$ für alle $x \in [a, b]$. In heutiger Terminologie ist eine Grenzfunktion von M ein Häufungspunkt von M bezüglich der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz. ARZELÀ modifiziert dann ASCOLIs Satz dahingehend, daß eine auf $[a, b]$ gleichmäßig beschränkte und gleichgradig stetige Menge von Funktionen mindestens eine Grenzfunktion besitzt. Ist eine solche Funktionenmenge M zusätzlich abgeschlossen im CANTORschen Sinne, d. h. enthält sie jede ihrer Grenzfunktionen, so nimmt ein stetiges reellwertiges Funktional auf dieser Menge sein Infimum und sein Supremum auf M tatsächlich an.

In Frankreich war es J. HADAMARD, der eine Ausdehnung der Punktmengentheorie auf Funktionenmengen anregte. Er hielt zu diesem Thema einen kurzen Vortrag auf dem ersten internationalen Mathematikerkongreß in Zürich, der keine Resultate enthielt, sondern mehr ein Aufruf war.[125] Es heißt dort:

> Quoique la théorie des ensembles fasse abstraction de la nature des éléments, on a surtout considéré, jusqu'à présent, les ensembles composés de nombres, ou, tout au plus, de points dans l'espace à n dimensions.
>
> Il ne me semble pas inutile de signaler l'intérêt qu'il y aurait à étudier des ensembles composés de *fonctions*. De tels ensembles peuvent d'ailleurs présenter des propriétés tout autres que les précédents.[126]

HADAMARD betont, ohne das DIRICHLETsche Prinzip zu nennen, die besondere Wichtigkeit der Frage der Existenz des Minimums von Integralen für die mathematische Physik. In einer *Remarque relative à la communication de M.*

[122] [Mo 1975], S. 108.
[123] [Vo 1887].
[124] [Ar 1889].
[125] [Had 1897].
[126] Ebd., S. 201.

Hadamard weist S. PINCHERLE darauf hin, daß Untersuchungen der von HADAMARD geforderten Art in Italien seit geraumer Zeit von ASCOLI, VOLTERRA und ARZELÀ durchgeführt worden seien.

HADAMARDS Schüler M. FRÉCHET hat die Anregungen seines Lehrers aufgegriffen. In Noten in den Comptes Rendus der Jahre 1904 und 1905[127] und schließlich in seiner Dissertation von 1906[128] geht er aber über HADAMARDS Forderung, Funktionenmengen zu studieren, hinaus, und legt axiomatisch definierte Strukturen zugrunde, von denen wir eine heute als Limesraum, eine andere (nach HAUSDORFF) als metrischen Raum bezeichnen. FRÉCHETS Werk ist von A. E. TAYLOR eingehend analysiert worden[129], so daß wir uns auf wenige Punkte beschränken wollen. Ausgehend von dem Satz, daß eine reelle stetige Funktion in einem abgeschlossenen Intervall ihr Minimum annimmt, kam es FRÉCHET im Hinblick auf das DIRICHLETsche Prinzip darauf an, eine Theorie stetiger reeller Funktionen über abstrakten Mengen als Argumentbereichen (opérationes fonctionelles) aufzubauen. Diese abstrakten Mengen benötigten natürlich eine "topologische Struktur" und es kam darauf an, in ihnen Teilmengen zu charakterisieren, für die – analog zu einem beschränkten abgeschlossenen Intervall – der Satz von BOLZANO-WEIERSTRASS gilt. Dies führte FRÉCHET auf den fundamentalen Begriff der Kompaktheit.

FRÉCHET betrachtete in [Fré 1904] eine Menge C von Elementen und führte darin axiomatisch einen Prozeß der Limesbildung ein (zu FRÉCHETS Axiomensystem und dessen Schwächen s. unter 3.5). $E \subset C$ heißt abgeschlossen, falls jedes Limeselement einer Folge von Elementen von E wieder in E liegt; E heißt kompakt, wenn für jede Folge $E_n \subset E$ mit $E_{n+1} \subseteq E_n$ und $E_n \neq \emptyset$ der Durchschnitt aller E_n nicht leer ist. Die Stetigkeit einer reellen Funktion $f(x)$ auf C wird ebenfalls über Folgen definiert und FRÉCHET kann nun konstatieren, daß jede stetige reelle Funktion auf einer abgeschlossenen kompakten Teilmenge $E \subset C$ ihr Maximum annimmt.

In [Fré 1905a] stellt FRÉCHET fest, daß in der 1904 definierten Struktur die Ableitung E' einer Menge E nicht notwendig abgeschlossen ist. Sein Bestreben ging in der Folgezeit deshalb dahin, eine axiomatische Struktur zu schaffen, in der dieser "Mißstand" nicht auftritt. Wiederum einer Anregung HADAMARDS folgend[130] führte er das Konzept der "voisinage" ein: Jedem Paar $a, b \in C$ ist eine reelle Zahl (a, b) zugeordnet, so daß folgende Axiome gelten:

(1) $(a, b) \geq 0$

(2) $(a, b) = 0$ genau dann wenn $a = b$

(3) Sind (a, c), (c, b) unendlich klein, so auch (a, b).

(Die Abbildung $C \times C \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften (1), (2), (3) ist die "voisinage"). Nun kann der Begriff des Limes definiert werden: $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow$

[127] [Fré 1904, 1905a-c].
[128] [Fré 1906].
[129] [Tay 1982, 1985, 1987]. S. ferner [Ber 1966/67].
[130] [Tay 1982], S. 246.

$(a_n, a) \to 0$. Ohne Beweis stellt FRÉCHET fest, daß nun die Ableitung E' einer Menge $E \subset C$ abgeschlossen ist.

In seiner Dissertation [Fré 1906] hat FRÉCHET die in den Comptes Rendus-Noten nur kurz angedeuteten Ideen systematisch dargestellt und die zugehörigen Beweise vollständig ausgeführt. Eine Menge C mit den Limesaxiomen nennt er nun “une classe $(\mathcal{L})$”. “Une classe (V)” heißt eine Menge C mit einer Abbildung $C \times C \to \mathbb{R}$ (einer “voisinage”), so daß gilt:

(1) $(a, b) = (b, a) \geq 0$

(2) $(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$

(3) Es existiert eine positive reelle Funktion $f(\varepsilon)$, definiert für positive ε, für die $\lim_{\varepsilon \to 0} f(\varepsilon) = 0$ gilt, so daß aus $(a, b) \leq \varepsilon$, $(b, c) \leq \varepsilon$ stets $(a, c) \leq f(\varepsilon)$ folgt.

An einer Stelle ersetzt FRÉCHET (3) durch die Dreiecksungleichung:

(3’) Für beliebige $a, b, c \in C$ gilt $(a, c) \leq (a, b) + (b, c)$.

Eine Funktion $C \times C \to \mathbb{R}$, die statt (3) dieses Axiom erfüllt, nennt FRÉCHET “écart” und die zugehörige Struktur “une classe (E)”. Für E-Klassen kann er folgenden Satz beweisen: Eine Teilmenge H einer solchen Klasse ist kompakt und abgeschlossen, wenn jede stetige “opération fonctionnel” auf H dort beschränkt ist und dort ihr Supremum annimmt. Einen solchen Satz für V-Klassen konnte er nicht beweisen; hier lag das Motiv, an dieser Stelle die Axiome (1), (2), (3) zu (1), (2), (3’) zu modifizieren.[131]

Es war HAUSDORFF, der in den *Grundzügen* die Bezeichnung “classe (E)” durch “metrischer Raum” ersetzte und die Theorie der metrischen Räume, eingebettet in sein noch allgemeineres Raumkonzept, wesentlich weiter entwickelte und in der mathematischen Welt bekannt machte. FRÉCHETs für die Topologie hochbedeutende Leistungen fanden zunächst nämlich wenig Resonanz. H. FREUDENTHAL bemerkte dazu:

> Man kann nicht sagen, daß FRÉCHETS Begriffe bis zu HAUSDORFFS Buch viel Anklang fanden. Der erste, der sie in ihren Konsequenzen wirklich von neuem durchdachte und derjenige, der sie, sei es unter neuen Namen, popularisierte, war HAUSDORFF. Aber natürlich tat HAUSDORFF mehr, und auch Anderes.[132]

Über die erkenntnistheoretischen Interessen, die F. RIESZ in seiner Arbeit [Ri 1907a] leiteten, wurde schon kurz unter 1.3 berichtet. RIESZ’ abstraktes Raumkonzept, das “mathematische Kontinuum”, fußt auf Axiomen über die Häufungspunktbildung, d. h. auf der Axiomatisierung der Operation des Ableitens

[131] Daß jede V-Klasse ein metrisierbarer topologischer Raum ist, bewies 1917 E. W. CHITTENDEN ([Chi 1917]). Dies war der Beginn einer intensiven Beschäftigung mit dem Problem der Metrisierbarkeit topologischer Räume. Dieses Problem hat auch HAUSDORFF lebhaft interessiert (NL HAUSDORFF, Fasz. 164, 165, 272, 636, 654 und Briefwechsel mit ALEXANDROFF).

[132] FREUDENTHAL, H.: *Felix Hausdorffs wissenschaftliche Bedeutung.* Vortrag Univ. Münster, 1970, unpubliziert. NL FREUDENTHAL, Rijksarchief in Noord-Holland, Haarlem. Inv.-Nr. 557, Bl. 6.

einer Menge (s. dazu ausführlich unter 3.4). Als sekundärer Begriff ergibt sich dann der Begriff der Umgebung:

> Ich sage von einer Teilmenge des mathematischen Kontinuums, sie sei eine Umgebung des Elementes A, wenn sie A enthält, und überdies A in bezug auf die Komplementärmenge isoliert ist.[133]

Auf S. 320 führt RIESZ Umgebungsbasen ein; als Beispiel nennt er im $\mathbb{R}^n$ die Gesamtheit der Kugeln mit rationalen Mittelpunkten und Radien. Mittels der Umgebungen werden dann Begriffe wie inneres Element einer Menge, Randelement einer Menge, offene Menge und über die offenen Mengen schließlich der Begriff des Zusammenhanges erklärt. Leider ist RIESZ nicht weit genug in der Ausarbeitung seiner Theorie fortgeschritten, und er ist nach [Ri 1908] auch nicht darauf zurückgekommen. So ergab es sich, daß seine Beiträge zur Topologie wenig Einfluß hatten.[134]

RIESZ selbst war natürlich die Beziehung klar, die zwischen seinen vornehmlich aus erkenntnistheoretischem Interesse vorgenommenen Untersuchungen zum Raumproblem und seinen äußerst einflußreichen funktionalanalytischen Arbeiten bestand; er hat z. B. mit folgender Bemerkung nachdrücklich auf die Bedeutung hingewiesen, welche die Betrachtung verschiedener Topologien auf ein und derselben Funktionenmenge hat:

> Eine Punktmannigfaltigkeit liefert das einfachste Beispiel eines mathematischen Kontinuums. Die vermittelnde Vorschrift kann dabei verschieden sein; sie kann z. B. auf dem Begriffe der Distanz, wie auch auf dem Begriffe des Ordnungstypus beruhen. [...] Für die Behandlung der Funktionenmannigfaltigkeiten reichen auch die Ordnungstypen nicht aus; es muß je nach der Art der Problemstellung der Begriff der Reihenkonvergenz [Reihe = Funktionenfolge – W. P.], oder auch der gleichmäßigen Konvergenz, oder endlich einer zweckmäßigen Verallgemeinerung des Distanzbegriffes herangezogen werden; je nach den Vorschriften wechselt dann auch eventuell die Art der Verdichtung, d. h. Elemente, die auf Grund der einen Vorschrift isoliert in bezug auf eine Teilmenge sind, können auf Grund einer andern Vorschrift derselben Teilmenge als Verdichtungsstellen zugeordnet werden. Ein Beispiel der Anwendung verschiedener Vorschriften auf dieselbe Mannigfaltigkeit liefern die Begriffe der schwachen und starken Extrema in der Variationsrechnung, deren scharfe Unterscheidung für jene Wissenschaft von grundlegender Bedeutung ist.[135]

RIESZ' funktionalanalytische Arbeiten stehen in einer Entwicklungslinie, die im Zusammenhang mit der Untersuchung von Integralgleichungen entstanden war. V. VOLTERRA hatte 1896 erstmals darauf hingewiesen, daß man Integralgleichungen als Grenzfälle (für $n \to \infty$) linearer Gleichungssysteme auffassen könne. Diese Idee inspirierte I. FREDHOLM zu seinen bedeutenden Untersuchungen über Integralgleichungen der Jahre 1899–1903 (u. a. FREDHOLMsche Alternative). Ab Wintersemester 1901/02 hielt HILBERT in Göttingen Vorlesungen über Integralgleichungen und veröffentlichte in den Jahren 1904–1910

[133] [Ri 1907a], S. 319.
[134] S. dazu [Th 1997], S. 24, S. 28.
[135] [Ri 1907a], S. 318–319. S. zu [Ri 1907a] auch [Tay 1982], S. 267–270.

sechs "Mitteilungen" zu diesem Thema, die er 1912 zu seinem Buch *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* ([Hi 1912]) zusammenfaßte. In der 5. Mitteilung aus dem Jahre 1906 legt HILBERT in der Menge der auf $[a,b]$ stetigen Funktionen eine Orthonormalbasis $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ zugrunde und transformiert die Integralgleichung

$$g(x) + \int_a^b K(x,y)g(y)dy = f(x) \tag{1}$$

durch Entwicklung von g, K und f nach der Orthonormalbasis in das Gleichungssystem

$$g_n + \sum_{m=1}^{\infty} k_{nm} g_m = f_n, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

($g_n = \int_a^b g(x)\varphi_n(x)dx$, etc.). Dabei sind $\sum g_n^2, \sum k_{nm}^2, \sum f_n^2$ konvergent. (1) und (2) hängen nun folgendermaßen zusammen: Eine stetige Lösung $g(x)$ von (1) liefert eine Lösung $\{g_n\}$ von (2) mit konvergenter Quadratsumme. Umgekehrt liefert jede Lösung $\{g_n\}$ von (2) mit konvergenter Quadratsumme eine stetige Lösung

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \varphi_n(x)$$

von (1). Damit tritt der Folgenraum l^2 ins Leben, ohne daß HILBERT diese Sprechweise benutzt. Im Mittelpunkt stehen die kompakten linearen Operatoren auf diesem Raum, bei HILBERT in Gestalt quadratischer Formen in unendlich vielen Veränderlichen.[136]

Für unseren Zusammenhang interessant ist die Wendung ins Abstrakte, hin zu einer allgemeinen Theorie der Funktionenräume, die RIESZ und E. SCHMIDT der HILBERTschen Theorie gaben. SCHMIDT hatte 1905 im Zusammenhang mit der Erarbeitung seiner Dissertation [Schm 1907] den Satz entdeckt, daß jedes vollständige Orthonormalsystem in $C[a,b]$ abzählbar ist. Hieran knüpfte RIESZ in einer Note vom November 1906[137] die Frage, ob man diesen Satz auch auf andere Klassen von Funktionen übertragen könne. Zu diesem Zweck betrachtet er alle Funktionen $f(x)$ über (a,b), für die das Quadrat im Lebesgueschen Sinne integrabel ist, identifiziert zwei Funktionen, die sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden, führt als einen FRÉCHETschen "écart" die Distanz

$$d(f,g) = \left(\int_a^b |f-g|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

ein und kann, nachdem er die Separabilität gezeigt hat, bezüglich des SCHMIDTschen Theorems feststellen:

[136] Zur Bedeutung von HILBERTS Arbeiten für die Entwicklung der Funktionalanalysis s. [Die 1981] s. 110 ff., ferner [Ber 1966/67].

[137] [Ri 1906].

> [...] le théorème restera valable pour notre classe etendu de fonctions.[138]

Damit war der $L^2(a,b)$ geboren, ohne daß RIESZ für seine Funktionenklasse einen Namen einführt oder von "Raum" spricht. Einen weiteren wichtigen Schritt in Richtung auf eine Theorie dieses Raumes ging RIESZ in [Ri 1907b]. Dort zeigte er, daß in der Funktionenklasse, die er 1906 eingeführt hatte, folgendes für die HILBERTsche Integralgleichungstheorie fundamentales Theorem gilt: Ist $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem und ist $(a_1, a_2, \ldots)$ eine Folge reeller Zahlen mit $\sum a_i^2 < \infty$, so gibt es stets ein $f(x)$ aus der betrachteten Funktionenklasse mit Fourierkoeffizienten a_i bezüglich $\{\varphi_i\}$, m. a. W., $L^2(a,b)$ ist vollständig.

Die Funktionalanalysis lebt ganz wesentlich von der geometrisch-topologischen Auffassung der betrachteten Funktionenklassen als Räume und dem daraus fließenden Einsatz der entsprechenden Sprache und Denkweise. In [Ri 1907c] wird erstmals – wenn auch nur angedeutet – das Programm einer solchen Geometrisierung entworfen. RIESZ verweist auf seine früheren Noten in den Comptes Rendus und schreibt dann:

> Le but de mes recherches était: „Approfondir la méthode des coordonnées appliquée à l'étude des systèmes de fonctions sommables."[139]

Die "Koordinaten" einer Funktion sind dann nichts anderes als die Fourierkoeffizienten bezüglich eines vollständigen Orthonormalsystems.

> De cette façon, on parvenait à représenter l'ensemble des fonctions sommables sur un sous-ensemble de l'espace d'une infinité dénombrable de dimensions.[140]

Was RIESZ im Sinne hat, ist eine "analytische Geometrie" für seine Funktionenräume, in moderner Sprache die Herstellung eines Normisomorphismus zwischen $L^2(a,b)$ und l^2:

> Pour cette classe de fonctions on peut définir une notion de distance et l'on peut fonder sur cette notion une théorie géométrique des systèmes de fonctions, théorie qui ressemble à la géométrie synthétique. D'autre part, la notion de distance peut aussi être définie d'une manière simple pour un sous-ensembles de points de notre espace; c'est pour l'ensemble des points dont la somme des carrés des coordonnées converge. Or, grâce au théorème sur l'intégration du produit de deux fonctions représentées par leurs constantes de Fourier, le lien entre ces deux notions de distance est

---

[138] Ebd., S. 741.

[139] [Ri 1907c], S. 1409.

[140] Ebd., S. 1409. Schon CANTOR nennt 1878 die Menge aller reellen Zahlenfolgen eine Mannigfaltigkeit mit einer „unendlich großen Dimensionenzahl" ([C 1878]). FRÉCHET spricht immer von Klassen, nicht von Räumen, mit Ausnahme des Raumes der reellen Zahlenfolgen, den er „espace E_ω" nennt ([Fré 1906], S. 38–45) und den er mittels der Metrik

$$\rho(x, x') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{|x_n - x'_n|}{1 + |x_n - x'_n|}$$

zu einer „classe (E)", d. h. zu einem metrischem Raum macht. Bei RIESZ ist der „espace" ebenfalls der Raum der reellen Folgen, das in Rede stehende „sous-ensemble" ist der l^2. Die Bezeichnung „Hilbertscher Raum" für l^2 findet sich erstmals in [Sch 1908], S. 266, S. 297–298.

très intime; il permet de faire correspondre à cette géométrie synthétique des fonctions une géométrie analytique.[141]

RIESZ kündigte die Ausführung seiner Ideen in einer größeren Arbeit in den Mathematischen Annalen an. Diese Arbeit erschien 1910; vorher jedoch hatte SCHMIDT den komplexen l^2 einer eingehenden Untersuchung unterzogen[142] und war damit RIESZ etwas zuvorgekommen. Kapitel I der SCHMIDTschen Arbeit trägt die Überschrift „Geometrie in einem Functionenraum". Seine "Functionen" sind komplexwertige Folgen mit konvergenter Summe der Betragsquadrate. In einer Fußnote zu dieser Überschrift verweist SCHMIDT auf [Fré 1906], [Ri 1906, 1907b–c] sowie auf zwei Comptes Rendus-Noten von E. FISCHER aus dem Jahre 1907 (FISCHER hatte ebenfalls die Vollständigkeit von $L^2(a,b)$ bewiesen). In einer weiteren Fußnote zur obigen Überschrift heißt es:

> Die geometrische Deutung der in diesem Kapitel entwickelten Begriffe und Theoreme verdanke ich KOWALEWSKI. Sie tritt noch klarer hervor, wenn $A(x)$ statt als Funktion als Vector in einem Raume von unendlich vielen Dimensionen definiert wird. Die zugrunde gelegte Definition der Länge $\|A\|$ und der Orthogonalität sind die von STUDY [Math. Annalen, Bd. LX, p. 372] in die Geometrie eingeführten.[143]

SCHMIDT zeigt, daß l^2 ein linearer Raum ist (den Ausdruck verwendet er nicht), definiert Skalarprodukt, Norm, Orthogonalität, ferner neben der punktweisen Konvergenz die starke Konvergenz. Er zeigt die Vollständigkeit des l^2 und gibt schließlich sein berühmtes Orthogonalisierungsverfahren an.

In RIESZ Arbeit von 1910 werden die Funktionenklassen $L^p\ (a,b)$ eingeführt:

> Jede Zahl p bestimmt eine Funktionenklasse $[L^p]$. Die Rolle der Klasse $[L^2]$ übernehmen hier je zwei Klassen $[L^p]$ und $[L^{\frac{p}{1-p}}]$; sie haben die Eigenschaft, daß *jede Funktion, die mit allen Funktionen der einen Klasse integrierbare Produkte ergibt, sicher der andern Klasse angehört.* Die Untersuchung dieser Funktionenklassen wird auf die wirklichen und scheinbaren Vorteile des Exponenten $p = 2$ ein ganz besonderes Licht werfen; und man kann auch behaupten, daß sie für eine axiomatische Untersuchung der Funktionenräume brauchbares Material liefert.[144]

Hier wird sie erstmals ins Auge gefaßt, die „axiomatische Untersuchung der Funktionenräume". Denn gegenüber $p = 2$ hat man eine ganz neue Situation: Man kann zwar zu jedem p auch l^p definieren, aber eine "analytische Geometrie" hat man nicht mehr, vielmehr tritt die innere Struktur der Funktionenräume selbst, ihre "synthetische Geometrie" in den Mittelpunkt des Interesses.[145]

HAUSDORFF kannte bei der Niederschrift der *Grundzüge* die einschlägigen funktionalanalytischen Arbeiten. Er gibt verschiedene Folgen- und Funktionenräume in Kap. VIII, §5 „Mengen mit Raumcharakter" als Beispiele für metrische Räume an. Bezüglich des "Hilbertschen Raumes" l^2 verweist er auf HILBERTS

[141] Ebd., S. 1410.
[142] [Schm 1908].
[143] Ebd., S. 56.
[144] [Ri 1910], S. 452.
[145] Ebd., S. 453. Eine eingehende Würdigung von [Ri 1910] aus funktionalanalytischer Sicht findet man bei [Heu 1986], S. 632 ff. S. dazu auch [Ber 1966/67], S. 54–62.

vierte Mitteilung über Integralgleichungen aus dem Jahre 1906, bezüglich des $L^2(a, b)$ auf [Ri 1906].

Von FRÉCHET und RIESZ beeinflußt war eine Schule junger amerikanischer Mathematiker um E. H. MOORE. MOORE selbst sah es als eine wichtige Aufgabe an, die gemeinsame abstrakte Grundlage verschiedener analoger Theorien herauszuarbeiten; er schrieb 1910:

> The existence of analogies between central features of various theories implies the existence of a general theory which underlies the particular theories and unifies them with respect to those central features.[146]

Dementsprechend wollte er eine "General Analysis" als Grundlage aller Analysis schaffen, so wie CANTOR mit der "allgemeinen Mengenlehre" eine Grundlage für die ganze Mathematik schaffen wollte. Dies sollte auf axiomatischer Grundlage, d. h. auf der Basis gewisser Postulate geschehen. Man hat deshalb die von MOORE ausgehende Richtung in der amerikanischen Mathematik als "Postulational Analysis" bezeichnet.[147] MOOREs Schüler E. R. HEDRICK, T. H. HILDEBRANDT, R. L. MOORE und R. E. ROOT versuchten auf verschiedene Weisen, gewisse topologische Grundbegriffe axiomatisch zu fassen und daraus eine allgemeine "Basistheorie" zu entwickeln. Unter diesen Ansätzen kam ein auf dem Umgebungsbegriff fußender Vorschlag von R. E. ROOT (1914) der HAUSDORFFschen Axiomatik am nächsten.[148] Für die Herausbildung topologischer Forschungstraditionen in den USA war jedoch das Wirken R. L. MOOREs folgenreicher, der in den Jahren 1915 und 1916 eine topologische Axiomatik der Ebene vorschlug. Diese ging über O. VEBLEN und die „Postulational Analysis" von E. H. MOORE auf HILBERTs Arbeiten [Hi 1902, 1903a, 1903b] zurück[149], nahm HAUSDORFFs Ideen aus den *Grundzügen* zunächst aber nicht auf.[150] Wir begnügen uns mit diesem kurzen Hinweis, weil die Arbeiten der Schule von E. H. MOORE HAUSDORFF nicht beeinflußt haben.[151] Sie zeigen jedoch, daß es nach 1910 an der Zeit war, einen allgemeinen Raumbegriff zu schaffen, um die große Vielfalt von Strukturen, in denen Begriffe wie Umgebung, Abstand, Häufungspunkt, Konvergenz etc. definiert werden konnten, unter einen einheitlichen Gesichtspunkt zu zwingen und so den "Pleonasmus" zu vermeiden, für jeden speziellen Fall „jedesmal eine neue Theorie zu entwickeln".[152]

Es erhebt sich die Frage, warum die originellen Ideen zur allgemeinen Topologie etwa von RIESZ in [Ri 1907a] und von ROOT in [Root 1914] – verglichen mit HAUSDORFFs *Grundzügen* – so wenig Wirkung hatten. Ein Grund ist

---

[146] [Moo 1910], S. 1

[147] S. dazu [Co 1996], S. 173–183. MOOREs "General Analysis" wird eingehend in [SiS 1998] analysiert.

[148] [Root 1914]. Siehe zu ROOTs Beiträgen insbesondere [Sh 1998], S. 491 ff., ferner [Tay 1987], S. 298–299.

[149] S. dazu Abschnitt 2.1.

[150] Zu R. L. MOORE siehe [Wi 1982], zu der Schule R. L. MOOREs vgl. die Kommentare von B. JONES, B. FITZPATRICK und M. STARBIRD in [AuL 1997, 1998].

[151] Die Beiträge der Schule von E. H. MOORE werden in [Sh 1998] ausführlich behandelt.

[152] [H 1914a], S. 211.

sicher HAUSDORFFs Kunst der Darstellung. Der entscheidende Grund dürfte aber darin liegen, daß HAUSDORFF nicht nur die vereinheitlichende begriffliche Grundlage schuf, sondern daß es ihm gelang, die Theorie in ihren Grundzügen wirklich auszuarbeiten, die Resultate seiner Vorgänger passend zu integrieren und darüberhinaus die Theorie mit einer Reihe weiterer bedeutender Innovationen zu bereichern.

2. Herausbildung der Hausdorffschen Umgebungsaxiome

2.1 Begegnung mit Hilberts Umgebungsaxiomen der Ebene

DAVID HILBERT publizierte im Jahre 1902 in den Nachrichten der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften eine kurze Note über einen neuen Zugang zur Grundlegung der "klassischen" Geometrien (EG und NEG) durch topologische Axiome [Hi 1902]. Eine ausführlichere Darstellung gab er wenig später in den Mathematischen Annalen.[153] Die ausführlichere Darstellung wurde mit kleinen Änderungen als Anhang IV in die 2. Auflage der *Grundlagen der Geometrie* aufgenommen[154]. Bei diesem neuen Zugang zu den Grundlagen der Geometrie definierte HILBERT die "Ebene" als zusammenhängende zweidimensionale Mannigfaltigkeit:

> Die Ebene ist ein System von Punkten. Jeder Punkt A bestimmt gewisse Theilsysteme von Punkten, zu denen er selbst gehört und welche Umgebungen des Punktes A heißen.
>
> Die Punkte einer Umgebung lassen sich stets umkehrbar eindeutig auf die Punkte eines gewissen Jordanschen Gebietes in der Zahlenebene abbilden. Jedes in diesem Jordanschen Gebiete enthaltene Jordansche Gebiet, welches den Punkt A umschließt, ist wiederum eine Umgebung von A. Das Jordansche Gebiet wird ein Bild jener Umgebung genannt. Liegen verschiedene Bilder einer Umgebung vor, so ist die dadurch vermittelte umkehrbar eindeutige Transformation der betreffenden Jordanschen Gebiete aufeinander eine stetige.
>
> Ist B irgendein Punkt in einer Umgebung von A, so ist diese Umgebung auch zugleich eine Umgebung von B.
>
> Zu irgend zwei Umgebungen eines Punktes A giebt es stets eine solche Umgebung des Punktes A die beiden Umgebungen gemeinsam ist.
>
> Wenn A und B irgend zwei Punkte unserer Geometrie sind, so giebt es stets eine Umgebung die beide Punkte A und B gleichzeitig enthält.[155]

Zur Charakterisierung der Bewegungen der Ebene forderte HILBERT, daß diese eine Gruppe bilden (Axiom I) und stellte zwei weitere Forderungen an deren Wirkung als topologische Transformationsgruppe auf. Die geometrische Zuspitzung erfolgte dabei durch die Forderung, daß die Standgruppen jedes Punktes (die "Rotationen") unendliche Kardinalität haben (Axiom II), sowie durch das

[153] [Hi 1903a], datiert 10. 5. 1902.
[154] [Hi 1903b]
[155] [Hi 1902a], S. 234–235.

Postulat der 3-Abgeschlossenheit der Transformationsgruppe (Axiom III).[156]

HILBERT gab in diesen Texten zwei unterschiedliche Charakterisierungen des Begriffes der "Ebene" an, eine allgemeinere und eine speziellere, auf den Kontext der Grundlagen der Geometrie zugeschnittene. Die erste (allgemeinere), im obigen Zitat gegebene, zeichnete in einer Menge E Systeme von Umgebungen U mit bijektiven Abbildungen φ auf ebene Jordangebiete V und stetigen Übergangsfunktionen so aus, daß E im Sinne einer 2-dimensionalen C^0-Mannigfaltigkeit topologisiert wurde.[157] HILBERT fügte ein Zusammenhangspostulat der Form hinzu, daß je zwei Punkte von E eine gemeinsame Koordinatenumgebung besitzten ([Hi 1902]).[158]

Die speziellere, vom ihm im Kontext der Grundlegung der Geometrie vorgezogene Charakterisierung forderte schon in der Definition den einfachen Zusammenhang der "Ebene" durch Auszeichnung einer globalen Abbildung auf ein Jordangebiet der reellen Zahlenebene. Dadurch schloß HILBERT den elliptischen Fall gezielt aus [Hi 1903a, 1903b]. Im Text für die Mathematischen Annalen verwies HILBERT lediglich pauschal und in einer Fußnote verborgen auf seine in [Hi 1902] gewählte allgemeinere Definition der Ebene.[159] Er wies seine Leser allerdings ausdrücklich auf die Bedeutung dieser allgemeineren Definition in [Hi 1902] hin:

> Die daselbst S. 234–235 aufgestellten Forderungen enthalten, wie mir scheint, für den Fall zweier Dimensionen die scharfe Definition des Begriffes, den *Riemann* und *Helmholtz* als "mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit" und Lie als "Zahlenmannigfaltigkeit" bezeichneten und ihren gesamten Untersuchungen zu Grunde legten.[160]

Beim Wiederabdruck des Aufsatzes in Anhang IV der *Grundlagen* machte Hilbert den Lesern den vollen Wortlaut der allgemeineren Definition durch eine entsprechende Ergänzung der Fußnote zugänglich.[161] Dem zitierten Kommentar fügte er die folgende Bemerkung über die Tragweite der allgemeineren Forderungen zur Charakterisierung der "Ebene" an:

> Auch bieten sie [die allgemeineren Forderungen – E. S.] die Grundlage für eine axiomatische Behandlung der Analysis situs.[162]

Dieser Hinweis wies auf einen fruchtbaren Ansatzpunkt für eine zukünftige Grundlegung der Topologie hin. Während für die Ausarbeitung der axiomatischen Fassung des Mannigfaltigkeitsbegriffs über WEYL ([Weyl 1913]), KNE-

[156] Das heißt: Konvergieren die Bilder eines Punktetripels (A, B, C) unter Anwendung einer Folge von Transformationen gegen ein Punktetripel (A', B', C') so gibt es eine Tranformation der Gruppe, die (A, B, C) auf (A', B', C') abbildet. Wir danken A. STRANTZALOS, der uns auf die historische und mathematische Bedeutung dieser Postulate aufmerksam gemacht hat.

[157] Umgebungen U und Abbildungen φ auf ebene JORDANgebiete V spielten in dieser allgemeineren Fassung bei HILBERT die Rolle von C^0-Koordinaten im Sinne der späteren Axiomatisierung des Mannigfaltigkeitsbegriffs bei VEBLEN und WHITEHEAD ([VeWh 1931, 1932]).

[158] In Konsequenz dieses Postulats erfüllt HILBERTS "Ebene" E das HAUSDORFFsche Trennungsaxiom.

[159] [Hi 1903a], S. 382, Anm. (**))

[160] [Hi 1903a], S. 382. Dieser Hinweis findet sich in sprachlicher Abänderung sinngleich auch in [Hi 1903b], S. 123.

[161] [Hi 1903], S. 122f., Anm. 2).

[162] Ebd., S. 123

SER ([Kn 1926]) und VEBLEN/WHITEHEAD ([VeWh 1931, 1932]) HILBERTs Anregung tatsächlich aufgegriffen und fortgeführt wurde, verlief die weitere Geschichte der Ausarbeitung eines allgemeinen topologischen Raumbegriffes wesentlich komplizierter, als HILBERT dies offenbar erwartete. Die Topologisierung von Ordnungsstrukturen oder Funktionenräumen lag außerhalb des Horizonts seiner Arbeiten von 1902/03; ihre begriffliche Komplexität begann sich erst in den folgenden Jahren abzuzeichnen (vgl. dazu die Abschnitte 1.2 und 1.4 dieses Beitrages). Direkten Einfluß auf die Ausarbeitung allgemeiner Raumkonzepte nahm HILBERTs Vorschlag lediglich über die Arbeiten im Umfeld E. H. MOOREs, insbesondere über dessen Schüler R. L. MOORE und der von diesem begründeten Forschungstradition der mengentheoretischen Topologie.[163] A. SCHOENFLIES Beweis aus dem Jahre 1906, daß ebene Jordan-Gebiete zur Kreisscheibe homöomorph sind, brachte bei Verallgemeinerungsversuchen für höhere Dimensionen überraschende Schwierigkeiten zu Tage, die nur langsam und endgültig erst in den 1960er Jahren überwunden werden konnten.[164] HAUSDORFF schließlich schloß entgegen einem verbreiteten Irrtum[165] bei seiner Axiomatisierung des topologischen Raumbegriffes in den fraglichen Jahren zwischen 1902 und 1914 *nicht direkt* an diesen Hinweis HILBERTs an, obgleich er HILBERTs Arbeiten zu den Grundlagen der Geometrie mit großem und aktivem Interesse verfolgte.[166]

Noch in der Antrittsvorlesung und den Passagen des Vorlesungsskriptes vom Wintersemester 1903/04, in denen es um die Grundlagen der euklidischen Geometrie ging, zitierte HAUSDORFF lediglich die erste Auflage von HILBERTs Arbeit [Hi 1899] und erwähnte HILBERTs neuen Ansatz zunächst nur in einem pauschalen Literaturverweis auf dessen Arbeit in den Mathematischen Annalen [Hi 1903a].[167] Bei der Charakterisierung der Grundstrukturen der klassischen Geometrien durch Kongruenzen und Bewegungen, also an den Stellen, an denen HILBERTs neue Ideen von 1902 für eine Begründung der Geometrie durch topologische Charakterisierung der Ebene und der zugehörigen Transformationsgruppe von Bedeutung gewesen wären, wies HAUSDORFF namentlich nur auf die Autoren HELMHOLTZ und LIE hin. Auch inhaltlich blieb seine Argu-

[163] S. S. 707.

[164] J. W. ALEXANDER beabsichtigte zunächst einen Beweis für die Dimension $n = 3$ [Ale 1922], entdeckte dann aber kurz darauf selber ein Gegenbeispiel, die berühmte "gehörnte Sphäre". Dies ist eine topologisch in S^3 eingebettete 2-Sphäre, die S^3 so in zwei Komponenten zerlegt, daß der Abschluß der einen Komponente homöomorph zur abgeschlossenen Vollkugel ist, der Abschluß der anderen Komponente hingegen nicht einmal eine Mannigfaltigkeit ist [Ale 1924a]. Im Fall einer stückweise linear eingebetteten 2-Sphäre konnte er dagegen solche Effekte ausschließen und eine entsprechend modifizierte Fassung des 3-dimensionalen Schoenflies-Satzes beweisen [Ale 1924b]. Nach Verfeinerungen seines Ergebnisses im Dreidimensionalen durch Untersuchungen von W. GRAEUB und E. E. MOISE in den 1950er Jahren, gelang erst M. BROWN ein Beweis des verallgemeinerten Schoenflies-Satzes [Bro 1960]. – Zu ALEXANDER siehe [Go 1999, S. 466 f.]; wir verdanken den Hinweis auf diese Arbeiten und ihre Bedeutung E. BRIESKORN.

[165] Siehe das Zitat aus Bourbaki, S. 676.

[166] Siehe Band VI dieser Edition.

[167] [H 1903a], S. 20.

mentation "klassisch", das heißt dem Stil des ausgehenden 19. Jahrhunderts verbunden.[168] Hätte HAUSDORFF HILBERTs Anhang IV [Hi 1903b] oder einen der Artikel [Hi 1902, 1903a] zu diesem Zeitpunkt schon inhaltlich zur Kenntnis genommen, so wäre hier ein namentlicher oder sachlicher Verweis auf HILBERT zu erwarten; eine Unterlassung in diesem Fall widerspräche völlig den sonstigen Gepflogenheiten HAUSDORFFs.

Als HAUSDORFF den Hilbertschen Ansatz zur Kenntnis nahm, interessierte er sich primär für den Gesichtspunkt der topologischen Transformationsgruppen. Den ersten und deutlichsten Hinweis auf HILBERTs Arbeiten finden wir in einem auf ein breiteres Publikum zielenden, vermutlich aus dem Zeitraum 1905/06 stammendenTextentwurf *Gruppentheorie*[169]. HAUSDORFF stellte dort verschiedene Typen von Transformationsgruppen der euklidischen Ebene vor, von den Kongruenzbewegungen bis zur „Gruppe der eindeutigen stetigen Punkttransformationen". Dabei diskutierte er unter anderem auch „das Merkmal der Abgeschlossenheit" der betrachteten Gruppen.[170] Er verwies insbesondere darauf, daß die Ähnlichkeitsgruppe in diesem Sinne nicht abgeschlossen ist, wohl aber die Gruppe aller euklidischen Bewegungen. In diesem Zusammenhang wies er mit Nachdruck auf HILBERTs Axiom III aus den Arbeiten [Hi 1902, 1903a, 1903b] hin:[171]

> Man könnte versucht sein, diese Erwägungen ziemlich spitzfindig und belanglos einzuschätzen; die Tragweite, die determinierende Kraft des Merkmales der Abgeschlossenheit ist aber überraschend gross, denn es ist D. Hilbert gelungen, im Wesentlichen durch dieses Merkmal, bei äusserstem Verzicht auf sonstige Voraussetzungen, die Gruppe der (euklidischen oder nichteuklidischen) Bewegungen gegen andere Gruppen zu charakterisiren.[172]

HAUSDORFF hob hier treffsicher den entscheidenden Punkt der topologischen Charakterisierung der Bewegungsgruppe der klassischen ebenen Geometrien hervor. Das zeigt, wie zielgenau er nun den Inhalt des Hilbertschen Ansatzes aufgenommen hatte. Aus unserer Sicht ist aber auch festzuhalten, daß HAUSDORFF direkt auf die Charakteristika der topologischen Bewegungsgruppe ab-

[168] Dies gilt auch für zwei Textstellen, an denen HAUSDORFF die Randeintragung "Gruppentheorie" anbrachte. NL HAUSDORFF: Kapsel 24: Fasz. 71, Bl. 27.

[169] NL HAUSDORFF: Kapsel 94: Fasz. 1082.

[170] HAUSDORFF diskutierte die "Abgeschlossenheit" von Transformationsgruppen wie bei der späteren 2-Abgeschlossenheit der Operation einer Gruppe G in folgendem Sinne: Ist bei Anwendung einer Folge von Transformationen g_i der Gruppe G auf ein Punktepaar (A, B) die entstehende Punktfolge $(g_i(A), g_i(B))$ konvergent, etwa gegen (A', B'), so gibt es eine Transformation $g \in G$ mit $(g(A), g(B)) = (A', B')$.

[171] HAUSDORFF unterschied hier nicht ausdrücklich zwischen, modern ausgedrückt, 2-Abgeschlossenheit und der von HILBERT geforderten 3-Abgeschlossenheit der Transformationsgruppe (analog erklärt wie 2-Abgeschlossenheit, jedoch mit Punktetripeln (A, B, C) statt mit Punktepaaren (A, B) wie in der vorangehenden Anmerkung). Bemerkenswerterweise gilt für ebene Transformationsgruppen tatsächlich sogar: 2-Abgeschlossenheit impliziert 3-Abgeschlossenheit. Dies ist allerdings ein wesentlich späteres, für HAUSDORFF unbekanntes und nicht erahnbares Ergebnis der Theorie der topologischen Transformationsgruppen (Dank an A. STRANTZALOS für entsprechende Hinweise und Diskussionsbemerkungen).

[172] Ebd., Bl. 32

hob und die Frage der „Grundlegung der Analysis situs“ durch Umgebungsaxiome dabei nicht einmal erwähnte.

Auch in seinen Vorlesungen zur Liegruppentheorie findet sich in dieser Zeit kein Hinweis auf besondere Aufmerksamkeit für die Herausarbeitung der zugrunde liegenden topologischen Aspekte. Als eine der in dieser Hinsicht am weitesten gehenden Bemerkungen findet sich in der Vorlesung *Einführung in die Theorie der continuirlichen Transformationsgruppen* vom WS 1905/1906 ein Hinweis auf den bloß lokalen Charakter der Exponentialabbildung. Dabei betrachtete HAUSDORFF zwar *jeweils einzelne Umgebungen* der Identität zur Beschreibung des lokalen Charakters der Überlegung;[173] aber es ergab sich auch in diesem Kontext kein Anlaß, *ganze Systeme von Umgebungen* zu studieren.

2.2 Umgebungen in der Funktionentheorie

“Umgebungen” spielten für HAUSDORFF in den Jahren bis zum Winter 1911/12 auch in der Punktmengenlehre keine eigenständige Rolle; sie dienten ihm in diesem Kontext zunächst als ein bloß extrinsisches Hilfskonzept. So hatte er in seiner ersten Vorlesung zur Mengenlehre im Sommersemester 1901 dem Studium der intrinsisch definierten Ordnungsbeziehungen in einer Menge M (Studium der „Lage der Elemente einer Menge *gegeneinander*“) die Betrachtungen der extrinsischen Beziehungen der Punkte einer Menge P gegen die „Elemente der *Umgebung*“ in einer umfassenderen Punktmenge M, etwa dem linearen oder n-dimensionalen “Continuum” (also dem $\mathbb{R}^n$), als den Gegenstand der Punktmengenlehre gegenübergestellt.[174] Dies entsprach noch ganz der üblichen Herangehensweise an die Topologie der Punktmengen, für die der Bezug auf das umgebende Kontinuum von grundlegender Bedeutung war. HAUSDORFF deutete den aus späterer Sicht naheliegenden Gedanken, daß es möglich und wünschbar sein könnte, die in der Menge P induzierten topologischen Begriffe intrinsisch zu fassen, weder in seiner Vorlesung im Sommer 1901 an, noch in den uns vorliegenden Dokumenten vor dem Winter 1911/12. Anscheinend gaben ihm nicht einmal seine intensiven Studien der Ordnungsstrukturen aus der gesamten Periode zwischen 1901 und 1911 und die dort verwendeten topologisierenden Sprechweisen – also (aus späterer Sicht) die auf CANTOR zurückgehenden und von HAUSDORFF und anderen Autoren entwickelten Ansätze zur Betrachtung der Ordnungstopologie – ausreichenden Anlaß, aus dem Rahmen der Ordnungsstrukturen herauszutreten und nach einer expliziten, intrinsischen Fundierung der topologischen Begriffe zu suchen.

In der Vorlesung zur *Mengenlehre* vom Sommersemester 1910 benutzte HAUSDORFF – wie wir sahen – als Umgebungen im $\mathbb{R}^n$ Intervalle, ohne das Wort “Umgebung” überhaupt zu verwenden (s. 1.1). F. RIESZ hatte dagegen in [Ri 1905]

[173] “Endlich ist anzumerken: unsere Sätze gelten, der ganzen Beweismethode nach, nur für eine gewisse *Umgebung der Identität*, und es kann sehr wohl vorkommen, daß jenseits dieses Bereiches die Gruppe Tf. enthält, die nicht durch die inf. Tf. der Gruppe erzeugt werden.” (NL HAUSDORFF: Kapsel 05: Fasz. 20, Bl. 87f., Hervorh. im Original).

[174] NL HAUSDORFF: Kapsel 03: Fasz. 12, Bll. 3, 53. Siehe Band I dieser Ausgabe. Vgl. auch [Scho 1996], S. 120.

ausdrücklich von *Umgebungen* gesprochen und diesen Ansatz in den folgenden Jahren weiter ausgebaut [Ri 1907a, 1908]. HAUSDORFF blieben diese Arbeiten allem Anschein nach bis in das Jahr 1912 unbekannt. Weder in HAUSDORFFs Vorlesungen zur Mengenlehre (von 1910 oder 1912) noch in anderen Nachlaßfragmenten dieser Zeit finden sich Hinweise auf RIESZ. Erst zur Vorbereitung für der Ausarbeitung der *Grundzüge* scheint HAUSDORFF andere Ansätze zur Grundlegung der Punktmengentopologie oder Analysis Situs zur Kenntnis genommen und mit seinem nunmehr unabhängig entwickelten, eigenen Ansatz in Beziehung gesetzt zu haben.

Der Beginn eines aktiven Interesses HAUSDORFFs an einer Betrachtung von *ganzen Systemen* von Umgebungen und ihrer internen Struktur zur Charakterisierung der Topologie von Flächen/Räumen läßt sich recht genau auf das Frühjahr und die erste Hälfte des Jahres 1912 datieren. HAUSDORFFs Interesse entstand im Kontext seiner Auseinandersetzung mit der Geometrie RIEMANNscher Flächen im Anschluß an eine Vorlesung *Einführung in die Functionentheorie* im Wintersemester 1911/12 [175]. In dieser Vorlesung führte HAUSDORFF die in der komplexen Funktionentheorie übliche Charakterisierung von *Umgebungen* eines Punktes $c \in \mathbb{C}$ als Inneres von Kreisscheiben um c mit Radius ε und die darauf aufbauenden Konzepte Häufungspunkt, offene Menge, abgeschlossene Menge und Gebiet ein.[176] Als *Gebiet* bezeichnete HAUSDORFF hier – im Unterschied zu seiner späteren Terminologie, etwa auch in den *Grundzügen* – (wegweise) zusammenhängende offene Mengen. Auch erwähnte er ausdrücklich, daß offene und abgeschlossene Mengen „Komplemente voneinander“ sind.[177] Allerdings zog er keine weiteren Konsequenzen aus dieser Beobachtung.

Die explizite Verwendung topologisierender Sprechweisen in der komplexen Funktionentheorie war natürlich bei HAUSDORFF überhaupt nicht neu. Deren Ursprünge gingen weit in das 19. Jahrhundert zurück. Schon WEIERSTRASS hatte explizit die Terminologie “Umgebung von a” ($a \in \mathbb{C}$) für das Innere endlicher Kreisscheiben verwendet[178] und das Umgebungskonzept auch auf “algebraische Gebilde”[179] zur Funktion $f(x, y) = 0$ übertragen. Als “bestimmte Umgebung” eines regulären Punkten (x_0, y_0) bezeichnete WEIERSTRASS die Gesamtheit der “Stellen” (x, y) des Gebildes $f(x, y) = 0$ mit $|x - x_0| < \varepsilon$ und $|y - y_0| < \varepsilon$. Ohne diese Spezifizierung (“bestimmt”) verstand er im Normalfall unter “Umgebung von (x_0, y_0)” den Inbegriff derjenigen Stellen (x, y), die (x_0, y_0) “unendlich nahe liegen”, in moderner Übersetzung also eher im Sinne eines Umgebungskeimes.[180] In singulären Stellen des Gebildes (Verzweigungspunkten, Mehrfachpunkten oder Polen) ging WEIERSTRASS zunächst zu “Elementen des algebraischen Gebildes” über, gebildet aus Äquivalenzklassen von Paaren von Potenzreihen $(\varphi(t), \psi(t))$, $\varphi(0) = x_0$, $\psi(0) = y_0$. Traten mehrere

[175] NL HAUSDORFF: Kapsel 09: Fasz. 33.
[176] Ebd., Bll. 10, 78, 80
[177] Ebd., Bl. 80.
[178] Siehe z. B. [W 1880], S. 202.
[179] WEIERSTRASS’ Bezeichnung für die analytisch charakterisierte Riemannsche Fläche einer algebraischen Funktion.
[180] Siehe z. B. [W 1875/76], S. 14, 18f.

Äquivalenzklassen auf, gingen also in WEIERSTRASS' Sprache „mehrere Elemente durch eine singuläre Stelle", forderte er „nicht nur die Stelle, sondern auch das Element, in dem wir sie gelegen denken," zu fixieren und bildete erst nach dieser "Fixierung" die (infinitesimalen) Umgebungen ([W 1875/76], S. 31ff).

An dieselben, mittlerweile weit verbreiteten, konzeptionellen Vorstellungen von WEIERSTRASS schloß im selben Semester, in dem HAUSDORFF in Bonn seine *Einführung in die Functionentheorie* las (Winter 1911/12), auch H. WEYL in seiner Göttinger Vorlesung an und stellte dort seine Fassung einer geometrisch-topologischen Charakterisierung der Riemannschen Flächen vor. Die Aufzeichnungen seiner Hörer arbeitete er im Frühjahr 1913 zum Manuskript seines bekannten Buches *Die Idee der Riemannschen Fläche* [Weyl 1913] aus. Darin publizierte er unter anderem seinen Versuch einer axiomatischen Charakterisierung zweidimensionaler Mannigfaltigkeiten als Grundlage für die Einführung Riemannscher Flächen.

WEYL nahm, anders als HAUSDORFF, HILBERTs Axiome der "Ebene" ausdrücklich als Vorbild für seine Axiome einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit. Er postulierte die Bedingungen an das System der Umgebungen allerdings anders und unter explizitem Einbezug von zugehörigen Koordinatenabbildungen in die reelle Ebene.[181] WEYL ließ das von HILBERT verwendete Postulat einer (einfach zusammenhängenden) Koordinatenumgebung zu je zwei Punkten aus naheliegenden kontextuellen Gründen fort.[182]

Es gibt keinen Hinweis darauf, daß HAUSDORFF vor der Fertigstellung des Buches [Weyl 1913] etwas von dessen Inhalt oder der WEYLschen Vorlesung erfuhr, allerdings sehr wohl kurz nach dessen Erscheinen. HAUSDORFF verwies schon in den *Grundzügen* darauf ([H 1914a], S. 457, Anm. zu S. 211) und verfasste im Jahre 1915 Studien zu Riemannschen Flächen, in denen er ausdrücklich auf WEYLs Buch verwies.[183] Er betonte an anderer Stelle in den *Grundzügen*, daß er eine Vorform seiner eigenen Axiomatik des topologischen Raumes schon im Sommersemester 1912, also vor der Publikation von WEYLs Umgebungsaxiomen für zweidimensionale Mannigfaltigkeiten ausgearbeitet und in seiner Vorlesung vorgestellt hatte ([H 1914a], S. 456f.). Indirekt wies er damit über die zeitliche Abfolge hinaus auch darauf hin, daß seine Überlegungen zur Axiomatik des topologischen Raumes unabhängig (weil vor der Lektüre) von WEYLs Definition der Riemannschen Fläche entstanden waren.

Umso bemerkenswerter erscheint die Gemeinsamkeit zwischen HAUSDORFF und WEYL, die sich aus dem Gegenstand der Untersuchungen ergab. Für HAUSDORFF wie für WEYL ergab sich nämlich der erste Anlaß für eine Beschäftigung mit den Eigenschaften ganzer Umgebungssysteme aus einer Analyse des Begriffs der Riemannschen Fläche. Diese im Objektfeld der Untersuchungen liegende Verbindung der Ansätze von WEYL und HAUSDORFF ist aus der Perspektive einer auf das materiale Handeln der Akteure ausgerichteten Begriffsgeschichte

[181] WEYL verwendete u. a. offene Kreisscheiben statt Jordangebiete.
[182] WEYL handelte sich allerdings die von ihm nicht absehbare Konsequenz ein, daß seine Axiome aus späterer Sicht die Hausdorff-Trennbarkeit nicht sicherstellten.
[183] NL HAUSDORFF: Kapsel 31: Fasz. 121, Bl. 2ff.

vielleicht noch interessanter als eine bisher häufig, aber *fälschlich* unterstellte direkte Rezeptionsverbindung zwischen WEYL und HAUSDORFF.[184] Auf jeden Fall ist sie bemerkenswert, auch wenn HAUSDORFFS Ansatz zum Studium von Umgebungssystemen zur Erklärung der Topologie von Flächen im ersten Schritt weniger ausgereift blieb als WEYLS. Dafür nahm HAUSDORFF ihn in viel allgemeinerer Perspektive im Sommersemester 1912 wieder auf und systematisierte ihn stärker, als WEYL dies je beabsichtigt hätte.[185]

Gegen Ende seiner Vorlesung vom Wintersemester 1911/12 gab HAUSDORFF in gebotener Kürze eine Einführung in die Theorie der Riemannschen Flächen. Ähnlich wie WEIERSTRASS bei algebraischen Gebilden, aber vereinfacht durch die Beschränkung auf die unverzweigten Stellen über $\alpha \in \mathbb{C}$, bildete er zunächst die "Punkte" der Riemannschen Fläche aus (verschiedenen) Funktionselementen einer mehrdeutigen analytischen Funktion $f(z)$, also Äquivalenzklassen der Form $(P(z-\alpha), A)$ mit Potenzreihen P und zugehörigem Konvergenzgebiet A. Daraufhin stellte er fest:

> Das Punktsystem muss aber noch geordnet werden, indem wir für jeden Punkt definieren, was wir unter Umgebung dieses Punktes verstehen wollen.[186]

Die Umgebungen zu einem Punkt der Fläche zu $\alpha \in \mathbb{C}$ gewann er, wie zu erwarten, durch Umentwicklung der Potenzreihe. Noch führte er keine Formalanalyse der Grundeigenschaften von Umgebungssystemen aus, merkte aber deutlich an, was in dieser Hinsicht zu tun sei, um die punktmengentheoretischen Begriffe innerer Punkt, offene Menge, Gebiet etc. nicht nur metaphorisch-anschaulich auf die Riemannsche Fläche übertragen zu können:

> Es müssen nun einige Sätze bewiesen werden, wie der, daß wenn β in einer Umgebung von α liegt, auch eine gewisse Umgebung von β ganz in

[184] Eine solche Rezeptionsverbindung kann man bei unvorsichtiger Lektüre in eine Formulierung H. WEYLS in seinem Nachruf auf HILBERT hineinlesen. Anläßlich der Kurzbesprechung von HILBERTS topologischen Fundierungsideen für die Grundlagen der Geometrie ergänzte WEYL in einer, wie er ausdrücklich anmerkte, "half-personal reminiscence", daß er selber in seiner Vorlesung über Riemannsche Flächen im Jahre 1912 daran angeschlossen und HILBERTS Idee zu einer Definition stetiger zweidimensionaler Mannigfaltigkeiten weitergebildet habe. Dabei habe er die Charakterisierung der Fläche durch die Umgebungssysteme selbst (vor Betrachtung von Koordinatenwechseln) stärker betont als HILBERT. Er schloß die Bemerkung an: "The ensuing definition was given its final touch by F. Hausdorff; the Hausdorff axioms have become a byword in topology" ([Weyl 1944], S. 156). WEYL bezog sich hier offensichtlich auf eine logische, keine historische Beziehung zwischen ihm und HILBERT auf der einen Seite und HAUSDORFF auf der anderen. Noch deutlicher wird das durch eine hierauf direkt bezogene Annmerkung WEYLS zu E. H. MOORE. Diese aus persönlicher Sicht verfaßte Bemerkung wurde von CHEVALLEY und WEIL in ihrem Nachruf auf WEYL als "Quelle" für die Behauptung einer nun als historisch-"kausal" wirkenden Beziehung (im Sinne aktiver Rezeption) zwischen WEYL und HAUSDORFF umgedeutet. Sie erklärten: WEYLS Axiome "...devraient servir de modèle à Hausdorff pour son axiomatisation de la topologie générale" ([Che/We 1957], S. 669). Diese Zuspitzung erfolgte ohne jeden historischen Beleg, aber im Gestus eines unbezweifelbaren Sachverhaltes. Leider wird diese unhaltbare Behauptung seitdem in der Literatur häufig unkritisch weitergegeben.

[185] WEYL stand dem Vorschlag einer Verankerung des mathematischen Kontinuumbegriffes in der transfiniten Mengenlehre aus grundlegenden philosophischen Gründen äußerst skeptisch gegenüber ([Scho 1999, 2000]).

[186] NL HAUSDORFF: Kapsel 09: Fasz. 33, Bl. 318.

jener Umgebung von α enthalten ist.

Nachdem man den Begriff Umgebung hat, lassen sich alle übrigen Begriffe von der schlichten Ebene auf eine Riemannsche Fläche übertragen.[187]

Dieser Gedanke lag inhaltlich nahe an HILBERTs Vorschlag von 1902 und entsprach im Grundsatz WEYLs Vorgehensweise von 1912/1913. HAUSDORFF machte in seiner allgemeinen Diskussion und den folgenden Beispielen zu Wurzelfunktionen und komplexen Logarithmen allerdings klar, daß bei seiner Art der Betrachtung die Verzweigungsstellen *nicht* zur Riemannschen Flächen gehörten. Er beendete das Vorlesungsskript mit einer kurzen Diskussion der Liftung von Wegen um einen Verzweigungspunkt.[188].

Bei seiner Heransgehensweise in der Vorlesung hatte HAUSDORFF (in unserer Sprache) nichtkompakte Flächen gebildet. In einer kurz nach Semesterende verfassten Notiz vom 2. 3. 1912 stellte er sich die Frage nach deren Kompaktifizierung. Dazu experimentierte er mit der Idee einer zusätzlich zum Umgebungssystem auf einer Fläche einzuführenden (kompatiblen)Metrik.[189] Durch die naheliegende Vervollständigungskonstruktion (mittels Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen) hoffte er, die "Grenze" N der Riemannschen Fläche M definieren und vielleicht daraus Aufschluß über den Zusammenhang der Fläche finden zu können. Die Idee blieb skizzenhaft und unausgearbeitet; ein zentraler Gedanke seiner Überlegung war aber, die Metrik auf die kompaktifizierte Fläche $M \cup N$ fortzusetzen[190] und diese dadurch mit einer topologischen Struktur zu versehen:

> Damit sind auch für die neuen Punkte, deren Menge N heisse, Umgebungen (der Menge $M + N$ angehörig) und das Übrige def.; jetzt können wir vielleicht Zusammenhang, Componenten von N und damit die Zusammenhangszahl von M definieren.[191]

HAUSDORFF entdeckte also in seinen Ausführungen zu Riemannschen Flächen im Wintersemester 1911/12 und in den direkt daran anschließenden Überlegungen Möglichkeit und Wichtigkeit einer Verallgemeinerung der Punktmengentheorie. Diese stützte sich auf eine intrinsische Auszeichnung von Umgebungssystemen in Objekten, die nicht per se schon in einem $\mathbb{R}^n$ eingebettet sondern als Mengen von abstrakten "Punkten" konstruiert waren. Die Umgebungen konnten dabei, mußten aber nicht, aus einer Metrik in der betrachteten Menge abgeleitet sein.[192] Was lag näher, als diese Fragestellung in seiner Vorlesung *Mengenlehre* im folgenden Sommersemester wieder aufzunehmen!

---

[187] Ebd., Bl. 320

[188] Ebd., Bll. 324–326.

[189] HAUSDORFF deutete an, daß die Metrik durch das Infimum der Längen von Verbindungswegen zweier Punkte (gemessen in der euklidischen Metrik auf der überlagerten komplexen Ebene) einzuführen sei, ließ die Frage nach der topologischen Äquivalenz bei Darstellungswechsel der Riemannschen Fläche allerdings ungestellt.

[190] Hinweis HAUSDORFFs an dieser Stelle: "Die nöthigen Axiome über die Entfernungen!"

[191] NL HAUSDORFF: Kapsel 31: Fasz. 121, Bl. 1

[192] Eine Vervollständigung der aus den regulären Punkten gebildeten Überlagerungsfläche der komplexen Ebene zur kompletten Riemannschen Fläche ohne die metrische Hilfskonstruktion vom März 1912 verwendete HAUSDORFF schon in der im SS 1912 gehaltenen Fortsetzung der Vorlesung über Elliptische Funktionen. Dort führte er bei der Diskussion der Riemannschen Fläche von $\sqrt{f(z)}$ die in der Funktionentheorie üblichen (und entsprechend auch bei

HAUSDORFF las im Sommer 1912 zum dritten Mal über dieses Thema; der Abschnitt über Punktmengen erhielt aber erst dieses Mal eine über den Rahmen der CANTOR-SCHOENFLIESschen Punktmengenlehre weit hinausweisende konzeptionelle Verankerung.

Er eröffnete den Abschnitt seiner Vorlesung über Punktmengen mit einem Paragraphen über *Umgebungen.* Dabei führte er Umgebungen U_x zu x in $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$ mit euklidischer Metrik zunächst als offene Kugelumgebungen ein und hielt direkt im Anschluss daran fest:

> Die Umgebungen haben folgende Eigenschaften:
>
> (α) Jedes U_x enthält x und ist in $\mathcal{E}$ enthalten.
>
> (β) Für zwei Umgebungen desselben Punktes ist $U_x \subseteq U'_x$ oder $U'_x \subseteq U_x$.
>
> (γ) Liegt y in U_x, so giebt es auch eine Umgebung U_y, die in U_x enthalten ist ($U_y \subseteq U_x$).
>
> (δ) Ist $x \neq y$, so giebt es zwei Umgebungen U_x, U_y ohne gemeinsamen Punkt ($\mathfrak{D}(U_x, U_y) = 0$).
>
> Die folgenden Bemerkungen stützen sich zunächst nur auf diese Eigenschaften. Sie gelten daher allgemein, wenn $\mathcal{E}$ eine Punktmenge $\{x\}$ ist, deren Punkten x Punktmengen U_x zugeordnet sind mit diesen 4 Eigenschaften.[193]

Mit dem letzten Satz hob HAUSDORFF den axiomatischen Charakter der von ihm aufgestellten vier Fundamentaleigenschaften ausdrücklich hervor. Er illustrierte ihn ganz im Sinne der Hilbertschen axiomatischen Methode, die er sich selber zum Vorbild gesetzt hatte, durch die Angabe zweier weiterer Umgebungssysteme im $\mathbb{R}^2$, von denen das eine der Charakterisierung von 1910 durch Koordinatenintervalle entsprach, das andere mit Umgebungen $U_x = \{y;\ |x_1 - y_1| < \rho,\ x_2 = y_2\}$, also vom Typ "horizontale Strecke (ohne Endpunkte)" arbeitete. Er ließ dabei unerwähnt, daß das eine Beispiel auf ein topologisch äquivalentes Umgebungssystem zu dem der Standardmetrik führte, das andere nicht. Er hatte aber bei der Auswahl der Beispiele diese Differenz sicherlich vor Augen.

Auf dieser Grundlage entwickelte er im folgenden die Konzepte der Punktmengenlehre, insbesondere der α- , β- , γ-Punkte, der abgeschlossenen, in sich dichten und perfekten Mengen, der Randpunkte und des Inneren von Teilmengen, des Gebietes und des Zusammenhangs. Selbst die später als Fundamentaleigenschaften ausgezeichneten Eigenschaften abgeschlossener und offener Mengen stellte HAUSDORFF kurz vor. Hier verwies er jedoch nicht auf die Möglichkeit, diese selber als Grundlage der axiomatischen Charakterisierung

(WEYL 1913) vorgezogenen) uniformisierenden Parameter über ∞ und über Verzweigungspunkten ein (NL HAUSDORFF: Kapsel 10: Fasz. 35, Bll. 165ff.)

[193] NL HAUSDORFF: Kapsel 09: Fasz. 34, Bl. 6.

der Topologie zu verwenden.[194] Insgesamt hatte HAUSDORFF aber mit der Vorlesung vom Sommer 1912 einen großen Schritt zur Verallgemeinerung der aus dem 19. Jahrhundert ererbten Punktmengenlehre zur mengentheoretischen Topologie hin getan. Diesen Anfang baute er in den nächsten zwei Jahren weiter aus.

Das zweite der von ihm aus den metrischen Umgebungen abstrahierten Umgebungsaxiome hatte allerdings noch einen konzeptionellen Mangel. Die dort geforderte Inklusionseigenschaft zwischen je zwei Umgebungen eines Punktes war zu eng formuliert, um die Ordnungstopologie zu charakterisieren (siehe 3.1).

3. Konzepte

Daß ein allgemeiner Raumbegriff durch Axiomatisierung sehr unterschiedlicher Konzepte gewonnen werden kann, stellt einen besonderen Reiz der Topologie dar und ist heute allgemein bekannt, war aber bereits den Schöpfern abstrakter Raumbegriffe bewußt, wie folgendes Zitat von HAUSDORFF verdeutlicht:

> Welchen der drei oben genannten Grundbegriffe Entfernung, Limes, Umgebung man zur Basis der Betrachtung wählen will, ist bis zu einem gewissen Grade Geschmackssache.[195]

Im folgenden soll die Beschreibung topologischer Räume mittels unterschiedlicher Grundbegriffe kurz nachgezeichnet werden.

3.1 Umgebungen

Die von HAUSDORFF in den *Grundzügen der Mengenlehre* angegebene Definition des topologischen (T_2-) Raumes unterscheidet sich von seiner Vorlesung aus dem Jahre 1912 im wesentlichen durch das Zulassen beliebiger Mengen E und eine gravierende Abschwächung des Axioms (β):

> Unter einem topologischen Raum verstehen wir eine Menge E, worin den Elementen (Punkten) x gewisse Teilmengen U_x zugeordnet sind, die wir Umgebungen von x nennen, und zwar nach Maßgabe der folgenden
>
> **Umgebungsaxiome:**
>
> (A) Jedem Punkt x entspricht mindestens eine Umgebung U_x; jede Umgebung U_x enthält den Punkt x.
>
> (B) Sind U_x, V_x zwei Umgebungen desselben Punktes x, so gibt es eine Umgebung W_x, die Teilmenge von beiden ist $\Big(W_x \subseteqq \mathfrak{D}(U_x, V_x)\Big)$.
>
> (C) Liegt der Punkt y in U_x, so gibt es eine Umgebung U_y, die Teilmenge von U_x ist ($U_y \subseteqq U_x$).

194 "V. Das Complement einer abgeschlossenen Menge ist ein Gebiet, das Complement eines Gebietes eine abgeschlossenen Menge. [...]
VI. Die Summe beliebig vieler und der Durchschnitt endlich vieler Gebiete ist wieder ein Gebiet." (NL HAUSDORFF: Kapsel 09: Fasz. 34, §8).

195 [H 1914a], S. 211.

(D) Für zwei verschiedene Punkte x, y gibt es zwei Umgebungen U_x, U_y ohne gemeinsamen Punkt $\Big(\mathfrak{D}(U_x, U_y) = 0\Big)$.[196]

Anscheinend hatte Hausdorff erkannt, daß der natürliche Umgebungsbegriff für linear geordnete Mengen sein ursprüngliches Axiom (β) nicht erfüllt.[197] Anschließend entwickelt Hausdorff eine detaillierte Theorie topologischer T_2-Räume und stetiger Abbildungen.

Hausdorffs Axiomatisierung, obwohl revolutionär, war nicht frei von Mängeln. Weniger gravierend ist, daß sein 4. Axiom heute als entbehrlich betrachtet wird – bereits Vietoris schlug 1921 vor, es durch das T_1-Axiom zu ersetzen [V 1921]. Bemerkenswert jedoch ist die Tatsache, daß zwei verschiedene Umgebungssysteme dieselbe Topologie (nach heutigem Sprachgebrauch; "gleichwertige Topologien" nach Hausdorffs Sprachgebrauch) induzieren können. In heutigem Sprachgebrauch sind Hausdorffs Umgebungssysteme keine *Topologien* sondern nur *offene Umgebungsbasen*. Dieser Mangel ist am leichtesten durch Erweiterung des Hausdorffschen Umgebungsbegriffs, bzgl. dessen jede Obermenge einer Umgebung wieder eine Umgebung ist, zu beheben. Dieser Weg wurde unabhängig voneinander von Kuratowski 1922 und Tietze 1923 beschritten [Ku 1922], [T 1923].[198] Darüber hinaus lieferte Tietze 1923 eine Axiomatisierung des erweiterten Umgebungsbegriffs, indem er jedem Punkt x des Raumes, den Punkt x umgebende Mengen $\bar{\mathfrak{U}}(x)$ so zuordnet, daß folgende Axiome gelten:

($\bar{A}$) Jedem Punkt x entspricht mindestens eine $\bar{\mathfrak{U}}(x)$; jede $\bar{\mathfrak{U}}(x)$ enthält x.

($\bar{B}$) a) Der Durchschnitt zweier x umgebender Mengen ist selbst eine x umgebende Menge; desgleichen b) jede Menge, die eine $\bar{\mathfrak{U}}(x)$ als Teilmenge hat.

($\bar{C}$) Für jede $\bar{\mathfrak{U}}(x)$ bildet die Menge aller Punkte y, für welche $\bar{\mathfrak{U}}(x)$ eine y umgebende Menge ist, selbst eine x umgebende Menge.

($\bar{D}$) Ist $x \neq y$, so gibt es eine $\bar{\mathfrak{U}}(x)$ und eine $\bar{\mathfrak{U}}(y)$ ohne gemeinsamen Punkt.[199]

Hiermit ist eine definitive Axiomatisierung topologischer (T_2)-Räume mittels des Umgebungsbegriffs gelungen. Es ist merkwürdig, daß Hausdorff 1927 in seiner *Mengenlehre* [H 1927a] die axiomatischen Darstellungen topologischer Räume mittels abgeschlossener Mengen bzw. abgeschlossener Hüllen neu aufgreift (erstere sogar jetzt als primär ansieht), daß er aber bei der axiomatischen Darstellung mittels Umgebungssystemen an seiner ursprünglichen Form festhält. Hier gilt wohl seine eigene Weisheit,

[196] [H 1914a], S. 213.

[197] Wird eine linear geordnete Menge vom Ordnungstyp $\omega_0 + 1 + \omega_1^*$, – wie in [H 1914a], S. 214, beschrieben – topologisiert, so besitzt ihr kleinster nicht isolierter Punkt keine Umgebungsbasis, welche die Bedingung (β) erfüllt.

[198] Hausdorff selbst hat in einer Studie *Umgebungsaxiome* vom 10.9.1917 (NL Hausdorff: Kapsel 33 : Fasz. 224) sein Axiom (C) (*Grundzüge*, S. 213) durch das folgende ersetzt: „Jede Umgebung U_x enthält eine solche U'_x, die ganz aus inneren Punkten von U_x besteht“ (vgl. den vollständigen Abdruck von Fasz. 224, dieser Band, S. 803).

[199] [T 1923], S. 295.

daß neue Dinge entdecken leichter ist, als alte Dinge auf neue Weise anschauen.[200]

Es ist erstaunlich genug, mit welcher Sicherheit HAUSDORFF aus der Fülle der möglichen die "richtigen" Axiome extrahierte. THRON formulierte 1966 seine Bewunderung hierfür wie folgt:

> Hausdorff's axioms are abstractions from the known behaviour of the neighborhoods $N_x(d)$ in a metric space. To say this, however, is not to minimize the difficulty of finding the right properties to abstract. Looking back over the half century since these axioms were introduced, one must admire Hausdorff's excellent selection.[201]

3.2 Offene und abgeschlossene Mengen

Der Begriff der abgeschlossenen Menge geht auf CANTOR zurück und wird von HAUSDORFF 1901 in seiner Vorlesung über Mengenlehre übernommen. Mit dem Begriff der offenen Menge haben schon WEIERSTRASS und CANTOR gearbeitet, ohne dafür eine eigene Bezeichnung einzuführen. WEIERSTRASS hatte allerdings eine Bezeichnung für eine offene zusammenhängende Menge der Ebene, nämlich "Gebiet". Die Bezeichnung "offene Menge" (domain ouvert) verwendet R. BAIRE bereits 1899 in seiner Dissertation für eine Menge des $\mathbb{R}^n$, die nur aus inneren Punkten besteht ([Ba 1899], S. 6–7). H. LEBESGUE bezeichnet in seiner Disseration als "ensembles ouverts" die Komplemente abgeschlossener Mengen ([Le 1902], S. 242). Von offenen Mengen spricht auch W. H. YOUNG, aber in einem andern Sinn: eine Menge, die nicht abgeschlossen ist, heißt bei ihm offen.[202] Der Begriff der offenen Menge, wie ihn BAIRE und LEBESGUE geprägt haben, findet sich auch bei RIESZ.[203] Bei HAUSDORFF erscheint dieser Begriff (ohne Hinweis auf seine Vorgänger) unter dem Namen *Gebiet* erstmals in seiner 1912 gehaltenen Vorlesung. Auch weist HAUSDORFF hier bereits nach, daß in jedem topologischen (T_2)-Raum die offenen Mengen (d.h. die Mengen, die nur aus *inneren* Punkten bestehen) genau die Komplementärmengen der abgeschlossenen Mengen sind und daß die offenen Mengen die üblichen Topologie-Axiome erfüllen:

1. Der ganze Raum E und die leere Menge sind offen.

2. Die Vereinigung beliebig vieler und der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen sind offen.

Zur Bezeichnung *Gebiet* führt HAUSDORFF in seinem Buch *Grundzüge der Mengenlehre* aus:

---

[200] [H 1903a], S. 8.
[201] [Th 1966], S. 14.
[202] [YY 1906], S. 19, 94 und weitere Stellen.
[203] [Ri 1907a], S. 320. Dort heißt es: „Die Teilmenge heiße offen, wenn sie nur aus inneren Elementen besteht.“

> Dies deckt sich nicht mit dem üblichen durch Weierstrass eingeführten Sprachgebrauch, der von einem Gebiet auch noch Zusammenhang fordert. Ein Weierstrasssches Gebiet ist für uns ein zusammenhängendes Gebiet, und unser Gebiet würde nach der gebräuchlichen Terminologie im allgemeinen eine Gebietsmenge oder Summe von Gebieten sein. Der Begriff einer Menge ohne Randpunkte ist aber so fundamental, daß er entschieden ein eigenes Substantiv verdient.[204]

Während die fundamentale Bedeutung des Begriffs *Gebiet* schnell anerkannt wurde, setzte sich dessen Name nicht durch. CARATHÉODORY schlug 1918 (ebenfalls ohne Hinweis auf LEBESGUE oder RIESZ) den Namen *offen* vor:

> Diese Dualität zwischen abgeschlossenen Punktmengen und solchen, die aus lauter inneren Punkten bestehen, ist, wie wir sehen werden, sehr tief ausgeprägt; wir werden sie am besten dadurch auch äußerlich zum Ausdruck bringen, wenn wir die Eigenschaft einer Menge, lauter innere Punkte zu besitzen, duch einen Namen charakterisieren, der zum Worte "abgeschlossen" in Beziehung steht. Wir wollen die Punktmengen, die aus lauter inneren Punkten bestehen, *offene Punktmengen* nennen; [...][205]

HAUSDORFF übernahm diesen Terminus bereits 1921/22 in seiner Vorlesung über *Mengenlehre und Theorie der reellen Funktionen.*[206] TIETZE schreibt hierzu 1923:

> Daß für den wichtigen Begriff der offenen Mengen ein eigenes Substantiv erwünscht wäre, hatte Hausdorff mit Recht hervorgehoben und dafür das Wort *Gebiet* gebraucht. Doch sind ihm spätere Autoren hierin nicht gefolgt. Tatsächlich scheint mir dieses Wort weit eher auf etwas Zusammenhängendes als auf ein "Inneres" hinzuweisen.[207]

Der weiter oben erwähnte Mangel der Existenz gleichwertiger Umgebungssysteme in HAUSDORFFs Topologie-Definition veranlaßte TIETZE, den Begriff der offenen Menge zu axiomatisieren. Er motiviert sein Vorgehen zunächst wie folgt:

> Dem Übergang von einem Umgebungssystem zu einem gleichwertigen gegenüber sind die in Nr. 2 erklärten Begriffe "innerer Punkt", "offene Menge" usw. invariant. In der Gesamtheit aller Umgebungssysteme eines topologischen Raumes, d.h. aller mit einem System gleichwertigen Systeme ist eines ausgezeichnet: das System aller offenen Mengen, jede derselben als Umgebung jedes ihrer Punkte genommen. Dies legt nahe, von vornherein von diesem System von Umgebungen auszugehen.[208]

[204] [H 1914a], S. 215.
[205] [Ca 1918], S. 40.
[206] NL HAUSDORFF: Kapsel 13: Fasz. 42.
[207] [T 1923], S. 292–293.
[208] [T 1923], S. 294.

Anschließend liefert er eine Axiomatisierung topologischer (T_2)-Räume mittels offener Mengen:

> Eine derartige Charakterisierung der Systeme, die aus allen offenen Mengen eines topologischen Raumes bestehen, leisten nämlich die folgenden Forderungen:
>
> ($A°$) Jeder Punkt x (des betrachteten topologischen Raumes $\mathfrak{R}$) ist in mindestens einer offenen Menge $\mathfrak{C}$ enthalten.
>
> ($B°$) Haben zwei offene Mengen $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$ wenigstens einen Punkt gemein, so ist auch ihr Durchschnitt (Menge der gemeinsamen Punkte) $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$ eine offene Menge.
>
> ($C°$) Gibt es zu jedem in der Menge $\mathfrak{U}$ enthaltenen Punkt x eine offene Menge, die x enthält und Teilmenge von $\mathfrak{U}$ ist, so ist $\mathfrak{U}$ selbst eine offene Menge.
>
> ($D°$) Für zwei verschiedene Punkte x, y gibt es zwei offene Mengen ohne gemeinsamen Punkt, von denen die eine x, die andere y enthält.[209]

Durch minimale Raffungen der TIETZEschen Axiome gelangte ALEXANDROFF [A 1925] zur Fassung der Axiome wie sie seit BOURBAKI [Bou 1940] und KELLEY [Ke 1955] in den meisten Lehrbüchern der Topologie dargestellt werden.

3.3 Berührpunkte und abgeschlossene Hülle

Auf den Seiten 219 und 220 seines Buches *Grundzüge der Mengenlehre* wurden von HAUSDORFF *Berührpunkte* (unter der Bezeichnung *α-Punkte*) und die *abgeschlossene Hülle* einer Menge A (unter der Bezeichung A_α) eingeführt, HAUSDORFF merkt an:

> Die Menge A_α ist bisher wenig beachtet worden, zum Schaden der formalen Einfachheit.[210]

Er zeigt, daß eine Menge A genau dann abgeschlossen ist, wenn die Gleichung $A = A_\alpha$ gilt, und betont auf Seite 229, daß sich alle topologischen Begriffe aus dem Begriff der abgeschlossenen Hülle herleiten lassen.

KURATOWSKI, JANISZEWSKIs bedeutendster Schüler, axiomatisierte 1922 den Operator, der jeder Teilmenge A des Raumes E seine *abgeschlossene Hülle* $\bar{A}$ ($= A_\alpha =$ Menge aller *Berührpunkte* von A) zuordnete, wie folgt:

$$\begin{array}{rccc} I. & \overline{A \cup B} & = & \bar{A} \cup \bar{B} \\ II. & A & \subset & \bar{A} \\ III. & \bar{\emptyset} & = & \emptyset \\ IV. & \bar{\bar{A}} & = & \bar{A}. \end{array}$$ [211]

[209] [T 1923], S. 294.

[210] [H 1914a], S. 220. Erstmals benutzt hatte den Begriff der abgeschlossenen Hülle R. BAIRE 1906; Z. JANISZEWSKI benutzte ihn mehrfach in seiner Dissertation von 1911 (s. [En 1998], 444–445).

KURATOWSKI untersucht dann die Eigenschaften dieses Abschluß-Operators und definiert und analysiert anschließend folgende "notions fondamentales de l'Analysis situs:" *abgeschlossene Menge, zusammenhängende* Menge, *Rand* einer Menge, *offene* Menge, *Inneres* einer Menge, *Umgebung* in demselben Sinne wie bei TIETZE 1923 und *lokal abgeschlossene* Menge. Im Gegensatz zu TIETZE verliert KURATOWSKI kein Wort über die logischen Beziehungen zwischen seinem Aufbau und dem von HAUSDORFF. KURATOWSKI hat 1922 mit seiner Axiomatisierung (ohne Trennungsaxiome) dem Begriff des topologischen Raumes seine heute gültige Allgemeinheit verliehen. Daß KURATOWSKI das T_2-Axiom nicht übernimmt, hat allerdings zunächst keine inhaltlichen Gründe. So sind die einzigen von ihm betrachteten Räume die Teilräume der n-dimensionalen Euklidischen Räume $\mathbb{R}^n$. Der Grund dürfte vielmehr in der simplen Tatsache liegen, daß eine Formulierung des T_2-Axioms mittels des Abschluß-Operators nicht so elegant ausfallen kann wie die KURATOWSKIschen Axiome I–IV. Das T_1-Axiom hingegen ist bei diesem Aufbau leicht formulierbar und daran liegt es wohl auch, daß KURATOWSKI 1933 in seinem Buch *Topologie I* [Ku 1933] den Begriff des topologischen Raumes durch Hinzufügen des T_1-Axioms

$$V. \qquad \overline{\{x\}} = \{x\}$$

wieder einschränkt. Durch diese Ergänzung geht die Unabhängigkeit der Axiome allerdings verloren; denn II. folgt aus I. und V.

HAUSDORFF übernimmt 1927 in seinem Buch *Mengenlehre* [H 1927a] den KURATOWSKIschen Allgemeinheitsgrad und formuliert Axiomensysteme für abgeschlossene Mengen, für offene Mengen und für den Abschluß-Operator. ALEXANDROFF und HOPF wählen 1935 in ihrem Lehrbuch *Topologie I* [A/H 1935] den Abschluß-Operator als topologisches Grundkonzept.

Es gibt natürliche Grenzprozesse, die zu Operatoren führen, welche KURATOWSKIs viertes Axiom $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$ nicht erfüllen. Paradebeispiel ist der Operator, der jeder Teilmenge A eines FRÉCHETschen $\mathcal{L}$-Raumes X (vergl. Abschnitt 3.5) die Menge aller $x \in X$ zuordnet, für die eine gegen x konvergierende Folge (a_n) in A existiert. Diese Tatsache veranlaßte HAUSDORFF 1935, *gestufte Räume* (= closure spaces) zu untersuchen, d.h. Mengen, die mit Operatoren versehen sind, die den ersten drei KURATOWSKIschen Axiomen genügen (wobei HAUSDORFF zusätzlich die T_1-Eigenschaft V. fordert) [H 1935b]. Transfinite Wiederholung derartiger Operatoren führt dann zu einem idempotenten Operator, also zu einer Topologie. In moderner Sprechweise liefert diese Konstruktion die topologische Reflexion eines gestuften Raumes. Die engen Beziehungen zwischen topologischen Räumen und $\mathcal{L}$-Räumen und den von HAUSDORFF als Bindeglied betrachteten gestuften Räumen haben HAUSDORFF offenbar besonders fasziniert, wie zahlreiche seiner unveröffentlichten Studien zeigen. Darauf werden wir in einem gesonderten Beitrag detaillierter eingehen.[212]

---

[211] [Ku 1922], S. 182.
[212] Siehe Band III dieser Edition.

HAUSDORFF untersucht in einer undatierten Studie, die vermutlich aus den Jahren 1936–1938 stammt[213] neben topologischen Räumen auch *halbtopologische Räume*, die man gewinnt, wenn man das KURATOWSKIsche Axiom I durch das schwächere Axiom

$$I'. \qquad \bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$$

bzw. das hierzu äquivalente Axiom

$$I''. \qquad A \subset B \implies \bar{A} \subset \bar{B}$$

ersetzt. Er zeigt, daß halbtopologische Räume auch vermöge der abgeschlossenen Mengen mittels der Axiome

(F_0) X selbst und die Nullmenge 0 ist abgeschlossen.
(F_1) Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.[214]

beschrieben werden können. Derartige Strukturen wurden später zwar von AUMANN [Aum 1970–73] unter dem Namen *Kontakt-Relationen* sorgfältig untersucht, konnten aber ansonsten die Herzen der Topologen nicht erwärmen. Eine detaillierte Analyse topologischer Grundbegriffe in topologischen, gestuften, halbtopologischen und fast-topologischen Räumen mittels geeigneter Axiomatisierungen des Abschluß-Operators lieferte ČECH 1937. Er schreibt:

> The present paper arose from notes of my lectures in the topological seminar held at Brno from May 1936. Their aim was to provide a basis for independent work on topology of members of the seminar. A typical aspect of this seminar was that the study of any question was not time–limited in advance; this is reflected in the present paper in that it is devoted to the detailed study of some fundamental concepts.[215]

ČECH formulierte folgende Axiome für Hüllenoperatoren:

$$\begin{array}{llcll} I'' & : & A \subset B & \Rightarrow & \bar{A} \subset \bar{B} \\ II & : & A & \subset & \bar{A} \\ III & : & \bar{\emptyset} & = & \emptyset \\ IV & : & \bar{\bar{A}} & = & \bar{A} \\ I & : & \overline{A \cup B} & = & \bar{A} \cup \bar{B} \end{array}$$

und untersuchte folgende Strukturen:

1. Hüllenoperatoren , die I'', II und III erfüllen. Unglücklicherweise bezeichnete er diese als “topologies”, die zugehörigen Räume als “topological spaces”. Wir wollen sie hier *fast-topologische Räume* nennen.

[213] NL HAUSDORFF:Kapsel 41: Fasz. 684.
[214] Ebd., Bl. 1.
[215] [Če 1937], S. 471.

2. *Halbtopologische Räume* (von Čech "F-spaces" genannt), die durch I'', II, III und IV beschrieben werden.

3. *Gestufte Räume* (von Čech "A-spaces" genannt, heute meist als "closure spaces" bezeichnet), die durch I, II und III beschrieben werden.

4. *Topologische Räume* (von Čech "AF-spaces" genannt), die durch I, II, III und IV beschrieben werden.

Čech zeigte insbesondere, wie sich topologische bzw. halbtopologische Räume alternativ durch Auszeichnung der abgeschlossenen Mengen beschreiben lassen, daß entsprechende Beschreibungen gestufter bzw. fast-topologischer Räume nicht möglich sind und konstruierte mittels transfiniter Induktion die halbtopologische Modifikation fast-topologischer Räume. Später lieferte Čech (1953 in Tschechisch, 1966 in Englisch) in Buchform eine weitergehende detaillierte Darstellung der gestuften Räume (= closure spaces) [Če 1966]. Im Gegensatz zu den topologischen und den gestuften Räumen blieben die fast-topologischen und die halb-topologischen Räume jedoch weitgehend unbeachtet. Für Hausdorff selbst spielten auch die gestuften Räume eine, wenn auch interessante, so doch untergeordnete Rolle, wie folgendes Zitat aus einer undadierten Ausarbeitung, vermutlich aus den Jahren 1938–40, verdeutlicht:

> Es sei wiederholt, daß wir den *topologischen Raum* X als die Hauptsache, die Erzeugung durch A_λ als Nebensache betrachten.[216]

3.4 Häufungspunkte und Ableitung

Bereits vor Hausdorff hat Riesz 1907 den Versuch unternommen, den Begriff des *mathematischen Kontinuums* abstrakt zu fassen. Als fundamentalen Begriff wählte er den von *Verdichtungsstellen* (= Häufungspunkte in moderner Terminologie: x ist Verdichtungsstelle von A, falls x Berührpunkt von $A\setminus\{x\}$ ist; äquivalent (für T_1-Räume): falls jede Umgebung von x unendlich viele Elemente von A enthält). Er formuliert:

> Ich sage von einer Mannigfaltigkeit, sie bilde ein *mathematisches Kontinuum*, wenn auf Grund irgend einer Vorschrift zwischen jedem Elemente und jeder Teilmenge derselben eine und nur eine der beiden Beziehungen besteht: a) das Element ist in bezug auf die Teilmenge *isoliert*; b) das Element ist eine *Verdichtungsstelle* der Teilmenge, und dabei folgende Grundsätze befriedigt werden:
>
> 1. In bezug auf eine Teilmenge, die aus einer endlichen Anzahl von Elementen besteht, ist jedes Element isoliert.
> 2. Ist ein Element Verdichtungsstelle einer Teilmenge, so ist es auch Verdichtungstelle einer jeden weiteren Teilmenge, in welcher jene Teilmenge enthalten ist.

[216] NL Hausdorff: Kapsel 42: Fasz. 741, Bl. 23.

3. Wird eine Teilmenge in zwei weitere Teilmengen zerlegt, so ist jedes Element, das Verdichtungsstelle jener Teilmenge ist, zugleich Verdichtungsstelle wenigstens einer jener Teilmengen.
4. Ist A eine Verdichtungsstelle der Teilmenge t und B ein von A verschiedenes Element, so gibt es eine weitere Teilmenge t^* von t, in bezug auf welche A Verdichtungsstelle, B aber isoliert ist.[217]

Anschließend bemerkt er, daß *Punktmannigfaltigkeiten* sowohl vermittels eines Distanz- als auch eines Ordnungsbegriffs einfache Beispiele *mathematischer Kontinua* liefern, definiert die Begriffe *Umgebung, Inneres, Grenze* (= Rand), *zusammenhängend, Ableitung* (A' = Menge aller Verdichtungsstellen von A), *stetig, Teilraum*, und leitet einige Ergebnisse her. Es fällt auf, daß das Äquivalent zu KURATOWSKIs Axiom IV. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ (nämlich $A'' \subset A'$) bei RIESZ fehlt. Das ist kein Versehen (sondern vermutlich durch die BAIREschen Ergebnisse über einfache Konvergenz von Folgen reeller Funktionen begründet), wie folgende Bemerkung zeigt:

> Es ist nicht notwendig $t'' \equiv (t')'$ in t' enthalten. Die Abgeschlossenheit der Ableitung, die doch für die Theorie der Punktmengen eine so fruchtbare Prämisse ist, muß somit in einer allgemeinen Theorie der mathematischen Kontinua vermißt werden.[218]

RIESZ ist sich der Originalität seines Konzepts bewußt:

> Der Begriff des mathematischen Kontinuums resp. jener des Verdichtungsstypus erscheint meines Wissens in diesen Untersuchungen das erste Mal in voller Allgemeinheit.[219]

Ein Jahr später berichtet RIESZ auf dem 4. internationalen Mathematikerkongreß in Rom über seine Konzepte, reichert sie durch eine analoge Axiomatisierung des Benachbarkeitsein von Paaren von Mengen (von ihm *Verkettung* genannt) an und analysiert insbesondere die Beziehungen zwischen *Zusammenhang* und *uniformem Zusammenhang* [Ri 1908].

Die bemerkenswerten RIESZschen Ideen fanden erst sehr viel später die Aufmerksamkeit, die sie verdienten. Gründe hierfür können wir nur vermuten. Neben der schweren Zugänglichkeit der RIESZschen Veröffentlichungen mag entscheidend gewesen sein, daß er (im Gegensatz zu HAUSDORFF) seine Theorie nicht bis zu überzeugenden Anwendungen vorantrieb, ein derartiges Vorgehen sogar für voreilig hielt:

> Vor einer gründlichen Untersuchung mannigfacher Klassen spezieller Verdichtungstypen wäre ein Versuch einer allgemeinen Theorie der Verdichtungstypen – glaube ich – verfrüht.[220]

[217] [Ri 1907a], S. 318.
[218] Ebd., S. 320.
[219] Ebd., S. 322.
[220] [Ri 1907a], S. 322.

Es blieb HAUSDORFF 1914 bzw. EFREMOVIČ [E 1951] vorbehalten, topologische bzw. Proximitäts-Räume in der Welt der Mathematik bekannt und heimisch werden zu lassen. BENTLEY, HERRLICH und HUŠEK haben 1998 die historische Entwicklung von Proximitäts-Strukturen detailliert dargestellt [BHH 1998].

VIETORIS übernahm 1921 die ersten drei Axiome von RIESZ und fügte ihnen anstelle des vierten RIESZschen Axioms, folgendes von RIESZ verworfene Axiom (IV) hinzu, das er in einer Vorlesung von W. GROSS kennengelernt hatte:

> (IV) Ist p_0 Häufungspunkt einer Menge $\{p\}$, deren Punkte selbst wieder Häufungspunkte einer Menge $\{m\}$ sind, so ist p_0 auch Häufungspunkt von $\{m\}$.[221]

Somit axiomatisiert VIETORIS den Ableitungs-Operator durch folgende Eigenschaften:

$$\begin{array}{cccc} (1) & \{x\}' & = & \emptyset \\ (2) & A \subset B & \Rightarrow & A' \subset B' \\ (3) & (A \cup B)' & \subset & A' \cup B' \\ (4) & A'' & \subset & A'. \end{array}$$

Darüber hinaus zeigt VIETORIS, daß hiermit eine Charakterisierung topologischer T_1-Räume geliefert wird – anders ausgedrückt: ein axiomatischer Aufbau der Theorie topologischer T_1-Räume mittels des Ableitungs-Begriffs.

KURATOWSKI formulierte 1922 folgende Axiome für die Ableitung A' von Teilmengen A von E:

$$\begin{array}{rccc} I' & (A \cup B)' & = & A' \cup B' \\ II' & E' & = & E \\ III' & \emptyset' & = & \emptyset \\ IV' & A'' & \subset & A'. \end{array}$$[222]

Im Gegensatz zu KURATOWSKIS gelungener Axiomatisierung des Abschluß-Operators, ist obiges Axiomensystem nicht befriedigend (z.B. wird das Axiom II' nur von insichdichten Räumen erfüllt).

SIERPIŃSKI benutzte 1927 den Begriff der Ableitung (unabhängig von VIETORIS) als primitives Konzept. Er formulierte folgende Axiome:

$$\begin{array}{cccc} (I) & A \subset B & \Longrightarrow & A' \subset B' \\ (II) & (A \cup B)' & \subset & A' \cup B' \\ (III) & \{x\}' & = & \emptyset \\ (IV) & A'' & \subset & A', \end{array}$$[223]

und entwickelte stufenweise die Topologie, indem er zunächst kein Axiom forderte, im nächsten Schritt Axiom (I) forderte, anschließend die Axiome (II)

[221] [V 1921], S. 176.
[222] [Ku 1922], S. 198.
[223] [Si 1927], S. 330 und 336–337.

und (III) hinzufügte (und anmerkte, daß die zugehörigen Räume genau den Rieszschen *mathematischen Kontinua* entsprechen) und am Ende der Arbeit Axiom (IV) hinzufügte.

Alle obigen Arbeiten beschränken sich auf die Analyse der T_1-Situation. Eine Untersuchung des Ableitungsbegriffs ohne diese Einschränkung scheint in der Literatur zu fehlen. Am weitesten drang HAUSDORFF 1938 in einer unveröffentlichten Studie vor, in der er sich insbesondere mit den Arbeiten von RIESZ und SIERPIŃSKI auseinandersetzt.[224] Für die Ableitung formuliert er die Axiome:

(α) $\emptyset' = \emptyset$

(β) $(A \cup B)' = A' \cup B'$

(γ) $A' \cup A'' \subset A \cup A'$

und bemerkt:

> Dieses A' ist (wenn in X das erste Trennungsaxiom nicht gilt) nicht notwendig abgeschlossen, so daß man also (γ) nicht zu $A'' \subset A'$ verschärfen kann.[225]

Er studiert die Beziehungen zwischen Ableitung A' und abgeschlossener Hülle $\bar{A}$ $(= A \cup A')$ und urteilt:

> Die Begründung der Topologie auf A' (statt auf $\bar{A}$) scheint mir nicht glücklich, weil verschiedene Funktionen A' denselben topologischen Raum bestimmen können.[226]

Hätte HAUSDORFF das zur Charakterisierung der Ableitungs-Operatoren topologischer Räume noch fehlende Axiom

(δ) $x \notin \{x\}'$

hinzugefügt (bzw. (α) durch dieses Axiom ersetzt), so wäre sein Urteil vermutlich anders ausgefallen. Angemerkt sei am Rande, daß die Eigenschaft $A'' \subset A'$ für topologische Räume echt zwischen T_1 und T_0 liegt.

Ferner sei erwähnt, daß ALBUQUERQUE 1941 topologische Räume mittels Axiomatisierung des *Rand*-Operators beschrieben hat [Al 1941].

3.5 Konvergenz

Zweifelsohne ist *Konvergenz* eines der fundamentalsten topologischen Konzepte. Interessanterweise stellt sich seine axiomatische Fassung jedoch als besonders schwierig heraus.

Folgen–Konvergenz

FRÉCHET unternahm 1904 als erster den Versuch einer axiomatischen Fassung der Konvergenz von *Folgen*. Er forderte

[224] NL HAUSDORFF: Kapsel 42: Fasz. 701.
[225] Ebd., Bl. 2
[226] Ebd., Bl.3

1. Jede konstante Folge konvergiert gegen ihren Wert.
2. Konvergiert eine Folge (x_n) gegen x, so konvergiert auch jede Teilfolge von (x_n) gegen x.
3. Konvergiert (x_n) gegen x und y, so gilt $x = y$.[227]

Diese Axiomatisierung, deren zugehörige Modelle er 1906 „classes($\mathcal{L}$)" nannte, ist jedoch viel zu umfassend, um vertraute einfache Phänomene, wie die folgenden, zu erfassen:

a) fügt man in eine gegen x konvergierende Folge endlich viele neue Glieder ein, so erhält man eine gegen x konvergierende Folge,

b) mischt man zwei gegen x konvergierende Folgen, so erhält man eine gegen x konvergierende Folge,

c) ändert man endlich viele Glieder einer gegen x konvergierenden Folge, so erhält man eine gegen x konvergierende Folge,

d) permutiert man die Glieder einer gegen x konvergierenden Folge, so erhält man eine gegen x konvergierende Folge.

Obige Mängel der FRÉCHETschen Axiomatisierung wurden von ihm selbst in seiner Analyse des Umgebungsbegriffs angesprochen:

> Sans modifier les ensembles dérivés dans une classe ($\mathcal{L}$), on peut ajouter aux deux conditions du paragraphe II que doivent vérifier les suites convergentes, les conditions suivantes:
>
> - Si une suite S converge vers A, il en est de même de toute suite obtenue en ajoutant à S un nombre fini d'éléments (distincts ou non).
> - Si un nombre fini de suites $S_1, S_2, \ldots, S_n$ convergent vers A, il en est de même de toute suite obtenue en rangeant en une seule suite les éléments (distincts ou non) de $S_1, S_2, \ldots, S_n$.[228]

Unabhängig von FRÉCHET erkannte URYSOHN die erwähnten Mängel:

> Des exemples élémentaires montrent cependant que certain inconvénients logiques ne sont pas exclus par la définition précédente de classes ($\mathcal{L}$). Par exemple, deux suites
>
> $$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$
>
> et
>
> $$y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$$

[227] [Fré 1904], S. 848.
[228] [Fré 1918], S. 148.

> peut être convergentes et avoir le même élément–limite
>
> $$z = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$$
>
> sans que la suite
>
> $$x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n, \ldots$$
>
> soit nécessairement convergente.[229]

URYSOHN beseitigte die Mängel der FRÉCHETschen Axiomatisierung der Folgenkonvergenz durch Hinzunahme des folgenden Axioms:

(4) eine Folge konvergiert bereits dann gegen x, wenn jede ihrer Teilfolgen eine Teilfolge enthält, die gegen x konvergiert.

Allerdings war es offensichtlich, daß der Folgenbegriff für eine befriedigende Konvergenztheorie zu eng war. Schon in Mengen von Ordnungszahlen lassen sich die dort natürlich auftretenden Konvergenzphänomene nicht mittels *Folgen* beschreiben. Auch die naheliegende Idee, Folgen (x_n) durch transfinite Folgen (d.h. Abbildungen mit wohlgeordneten Indexmengen) zu ersetzen, erwies sich, wie BIRKHOFF 1937 zeigte, als unzureichend: Selbst dann, wenn man das Verfahren der Hinzunahme von Grenzwerten transfiniter Folgen unbeschränkt wiederholt, erreicht man in einem topologischen Raum im allgemeinen (z. B. in $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$) nicht alle Berührpunkte einer Menge.

> This shows that even unlimited use of transfinite sequences leads one to situations inconsistent with our usual topological ideas.[230]

FRANKLIN zeigte 1965, daß ein topologischer Raum genau dann durch Folgen bestimmt ist (in dem Sinne, daß eine Teilmenge A von X genau dann abgeschlossen ist, wenn keine Folge in A gegen einen Punkt in $X\backslash A$ konvergiert), wenn X Quotient eines metrisierbaren Raumes ist [Fra 1965]. HERRLICH konnte 1967 zeigen, daß ein topologischer Raum genau dann (analog wie oben) durch transfinite Folgen bestimmt ist, wenn er Quotient eines ordnungsfähigen Raumes ist [Her 1967]. Die geschichtliche Entwicklung der Theorie der Folgen-Konvergenz wurde von FRIČ detailliert dargestellt [Fri 1997].

Netz-Konvergenz

Hingegen führte das Konzept von *Netzen* (= *Moore-Smith-Folgen*; = Abbildungen mit gerichteten Indexmengen) zum Ziel. Das Konzept wurde unabhängig voneinander von VIETORIS [V 1921] und von MOORE und SMITH [Moo/Sm 1922] entwickelt.[231] Aber erst eine Umdefinition des Begriffs *Teilfolge* erlaubte es KELLEY 1950, topologische Räume durch Axiomatisierung der Konvergenz von Netzen zu beschreiben [Ke 1950]. Während die ersten drei Axiome bei

[229] [U 1926], S. 78.
[230] [Bi 1937], S. 46.
[231] Zur MOORE-SMITH Konvergenz s. insbesondere [SiS 1998], S. 70 ff.

KELLEY natürliche Verallgemeinerungen der Axiome (1) und (2) von FRÉCHET bzw. von Axiom (4) von URYSOHN sind, ist das vierte Axiom nichts anderes als BIRKHOFFS äußerst kompliziertes *Theorem of Iterated Limits.*

Filter-Konvergenz

Eine elegantere und von Topologen bevorzugte Alternative stellt CARTANS *Filter*-Begriff dar [Car 1937a, 1937b]. (*Filterbasen* wurden bereits 1921 von VIETORIS unter dem Namen *Kränze* [V 1921] und 1935 von BIRKHOFF unter dem Namen *overlapping systems* eingeführt [Bi 1935] – vergl. [Rei 1997]; *freie Ultrafilter* erscheinen sogar bereits 1908 bei RIESZ unter dem Namen *ideale Verdichungsstellen* (von diskreten Proximitäts-Räumen) [Ri 1908]). CHOQUET führte 1948 eine tiefsinnige Analyse der Filter-Konvergenz durch [Cho 1948]. Sie führte ihn zu den Begriffen *pseudotopologischer* und *pretopologischer* Räume, durch welche das Konzept der topologischen Räume in natürlicher Weise verallgemeinert wurde. Die folgenden drei Axiome der Filterkonvergenz sind naheliegende Verallgemeinerungen der entsprechenden Axiome für die Folgenkonvergenz:

(1) Für jedes $x \in X$ konvergiert der Ultrafilter $\dot{x} = \{A \subset X \mid x \in A\}$ gegen x.

(2) Konvergiert ein Filter $\mathcal{F}$ gegen x, so konvergiert auch jeder Filter, der feiner als $\mathcal{F}$ ist, gegen x.

(3) Ein Filter $\mathcal{F}$ konvergiert bereits dann gegen x, wenn jeder Filter, der feiner als $\mathcal{F}$ ist, sich zu einem gegen x konvergierenden Filter verfeinern läßt.

Das folgende Axiom – eine Verschärfung von (3) – hat hingegen kein Analogon für Folgen:

(4) Für jedes $x \in X$ konvergiert der Durchschnitt $\mathfrak{U}(x)$ aller gegen x konvergierenden Filter selbst gegen x.

Eine Filter-Konvergenz, die (1)–(3) erfüllt, heißt *Pseudotopologie*, eine solche, die (1)–(4) (äquivalent: (1), (2) und (4)) erfüllt, eine *Pretopologie.* Da (3) offenbar äquivalent zu dem Axiom

(3*) Ein Filter $\mathcal{F}$ konvergiert bereits dann gegen x, wenn alle $\mathcal{F}$ verfeinernden Ultrafilter gegen x konvergieren

ist, lassen sich Pseudotopologien alternativ mittels der *Konvergenz von Ultrafiltern* und dem einzigen Axiom (1) beschreiben. Pretopologien lassen sich alternativ durch Umgebungen (U ist genau dann Umgebung von x, wenn $U \in \mathfrak{U}(x)$ gilt, weshalb $\mathfrak{U}(x)$ auch *Umgebungsfilter* von x genannte wird) oder durch Berührpunkte (x ist genau dann Berührpunkt von A, wenn es einen gegen x konvergierenden Filter $\mathcal{F}$ mit $A \in \mathcal{F}$ gibt) beschreiben. Hierbei stellt sich heraus, daß die pretopologischen Räume exakt den *gestuften* Räumen HAUSDORFFS entsprechen (vergl. 3.3), wobei das T_1-Axiom für pretopologische Räume folgende Form annimmt:

(5) Konvergiert $\dot{x}$ gegen y, so gilt $x = y$.

Eine Charakterisierung topologischer Räume direkt mittels des Begriffs der *Filter-Konvergenz* (ohne Hilfsbegriffe wie *Umgebung* oder *abgeschlossene Hülle*) erfordert, wie im Fall der Netze, ein sehr kompliziertes und "unnatürliches" zusätzliches Axiom. (Vergl. [Kow 1954] und [Wy 1996]). Es erscheint uns deshalb als sehr unwahrscheinlich, daß das Konzept des topologischen Raumes durch Axiomatisierung eines geeigneten Konvergenz-Begriffs hätte gewonnen werden können.

Diese Schwierigkeit war hingegen nicht der Grund, der CHOQUET zu seinen allgemeineren Begriffsbildungen veranlaßte, sondern vielmehr die Tatsache, daß es sehr natürliche Konvergenz-Prozesse gibt, die nicht durch Topologien beschreibbar sind (analog wie z.B. die einfache Konvergenz auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ nicht durch eine Metrik beschreibbar ist) –

> [...] en particulier, la *"pseudo-topologie"* de l'espace de sous-ensembles fermés d'un espace de Hausdorff n'est une topologie que lorsque cet espace est localement compact.[232]

Hierbei handelt es sich um folgendes: In Verallgemeinerung des von HAUSDORFF 1914 geschaffenen Begriffs des *unteren* bzw. *oberen abgeschlossenen Limes* einer Mengenfolge in einem topologischen Raum X, definierte CHOQUET 1948 *obere* und *untere Limiten* von Filtern $\mathcal{F}$ auf der Menge HX aller abgeschlossenen Teilmengen eines topologischen Raumes X wie folgt [Cho 1948]:

$$\begin{array}{lclllll} x \in \overline{\lim}\, \mathcal{F} & \iff & \forall\, U \in \mathfrak{U}(x) & \forall F \in \mathcal{F} & \exists A \in F & A \cap U \neq \emptyset \\ x \in \underline{\lim}\, \mathcal{F} & \iff & \forall\, U \in \mathfrak{U}(x) & \exists F \in \mathcal{F} & \forall A \in F & A \cap U \neq \emptyset \end{array}$$

Die auf HX durch

$$\mathcal{F} \longrightarrow A \quad \iff \quad A \;=\; \underline{\lim}\, \mathcal{F} \;=\; \overline{\lim}\, \mathcal{F}$$

definierte Filter-Konvergenz ist stets eine Pseudotopologie, aber für nicht lokalkompakte T_2-Räume X keine Pretopologie, geschweige denn eine Topologie.

Auch gibt es für pseudotopologische Räume im Gegensatz zu topologischen Räumen geeignete *Funktionenraum-Strukturen.*

Für weitergehende Verallgemeinerungen siehe den Übersichtsartikel von BENTLEY, HERRLICH und LOWEN-COLEBUNDERS [BHL 1990].

Literatur

[Al 1941] ALBUQUERQUE, J.: *La notion de frontière en topologie.* Port. Math. **2** (1941), 280–289.

[232] [Cho 1948], S. 57.

[A 1925] ALEXANDROFF, P.: *Zur Begründung der n–dimensionalen mengentheoretischen Topologie.* Math. Annalen **94** (1925), 296–308.

[A/U 1929] ALEXANDROFF, P.; URYSOHN, P.: *Mémoire sur les espaces topologiques compacts.* Verh. Akad.Wetensch.Amsterdam **14** (1929), 1–96.

[A/H 1935] ALEXANDROFF, P.S.; HOPF, H.: *Topologie I.* Springer, Berlin 1935.

[Ale 1922] ALEXANDER, J. W.: *A theorem on the interior of a simply connected surface in threespace.* Bull. AMS **28** (1922), 10.

[Ale 1924a] ALEXANDER, J. W.: *An example of a simply connected surface bounding a region which is not simply connected.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA **10** (1924), 99–101.

[Ale 1924b] ALEXANDER, J. W.: *On the subdivision of 3-space by a polyhedron.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA **10** (1924), 6–8.

[Ar 1889] ARZELÁ, C.: *Funzioni di linee.* Nota del Prof. CESARE ARZELÁ, presentata dal Corrispondente V. VOLTERRA. Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, Ser. 4, **5** (1889), 342–348.

[As 1884] ASCOLI, G.: *Le curve limite di una varietà data di curve.* Memorie dell'Accademia dei Lincei, Ser. 3, **18** (1884), 521–586.

[Au/L 1997, 1998] AULL, C. E.; LOWEN, R. (Ed.): *Handbook of the History of General Topology.* Kluwer, Dordrecht–Boston–London. Vol. I, 1997, Vol. II, 1998.

[Aum 1970–73] AUMANN, G.: *Kontakt–Relationen.* Sitzungsber. Bayer. Akad. der Wiss., Math.–Naturwiss.Klasse (1970), 67–77; (1971), 119–122; (1973), 79–86.

[Ba 1898] BAIRE, R.: *Sur les fonctions discontinues qui se rattachent aux fonctions continues.* Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **126** (1898), 1621–1623.

[Ba 1899] BAIRE, R.: *Sur les fonctions de variables réelles.* Annali di Matematica Pura ed Applicata (Ser. 3), **3** (1899), 1–124.

[Be 1905] BERNSTEIN, F.: *Untersuchungen aus der Mengenlehre.* Math. Annalen **61** (1905), 117–155.

[Ber 1966/67] BERNKOPF, M.: *The Development of Function Spaces with Particular Reference to their Origins in Integral Equation Theory.* Archive for History of Exact Sciences **3** (1966/67), 1–96.

[BHH 1998] BENTLEY, H.L.; HERRLICH, H.; HUŠEK, M.: *The historical development of uniform, proximal, and nearness concepts in topology.* In: [Au/L 1997, 1998], Vol. II, 577–629.

[BHL 1990] Bentley, H.L.; Herrlich, H.; Lowen–Colebunders, E.: *Convergence.* J. Pure Appl. Algebra **68** (1990), 27–45.

[Bi 1935] Birkhoff, G.: *A new definition of limit.* Bull. Amer. Math. Soc. **41** (1935), 635.

[Bi 1937] Birkhoff, G.: *Moore–Smith convergence in general topology.* Annals of Math. **38** (1937), 39–56.

[Bi/Kr 1984] Birkhoff, G.; Kreyszig, E.: *The establishment of functional analysis.* Historia mathematica **11** (1984), 258–321.

[B 1876] du Bois-Reymond, P.: *Abhandlungen über die Darstellung der Functionen durch trigonometrische Reihen.* Abhandlungen der Königl. Bayrischen Akademie der Wiss. zu München, II. Klasse, Bd. XII (1876). WA: Ostwalds Klassiker, Nr. 186. W. Engelmann, Leipzig 1913.

[B 1877] du Bois-Reymond, P.: *Über die Paradoxen des Infinitärcalcüls.* Math. Annalen **6** (1877), 149–167.

[B 1882] du Bois-Reymond, P.: *Die allgemeine Functionentheorie.* Erster Theil: Metaphysik und Theorie der mathematischen Grundbegriffe: Grösse, Grenze, Argument und Function. Lauppsche Buchhandlung, Tübingen 1882.

[Bo 1895] Borel, E.: *Sur quelques points de la théorie des fonctions.* Annales Sci. de l'École Normale, Sér. 3, **12** (1895), 9–55.

[Bo 1898] Borel, E.: *Lecons sur la théorie des fonctions.* Gauthier-Villars, Paris 1898.

[Bou 1940] Bourbaki, N.: *Topologie Générale.* Hermann, Paris 1940.

[Bou 1971] Bourbaki, N.: *Elemente der Mathematikgeschichte.* Vandenhoek & Ruprecht, Göttingen 1971.

[Br 1911] Brouwer, L. E. J.: *Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl.* Math. Annalen **70** (1911), 161–165. WA: Collected Works, Vol. 2, North-Holland, Amsterdam 1976.

[Br 1928] Brouwer, L. E. J.: *Zur Geschichtsbeschreibung der Dimensionstheorie.* Kon. Nederl. Akad. Wetensch. Proceedings **31** (1928), 953–957.

[Bro 1960] Brown, M.: *A proof of the generalized Schoenflies theorem.* Bull. AMS **66** (1960), 74–76.

[Cam 1982] Cameron, D.E.: *The birth of Soviet topology.* Topology Proceedings **7** (1982), 329–378.

[C 1872] Cantor, G.: *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen.* Math. Annalen **5** (1872), 123–132. WA: [C 1932], 92–101.

[C 1874] Cantor, G.: *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen.* Journal für die reine und angewandte Mathematik **77** (1874), 258–262. WA: [C 1932], 115–118.

[C 1878] Cantor, G.: *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre.* Journal für die reine und angewandte Mathematik **84** (1878), 242-258. WA: [C 1932], 119–133.

[C 1879-1884] Cantor, G.: *Über unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten.* Math. Annalen. Nr.1, **15** (1879), 1–7: Nr.2, **17** (1880), 355–358; Nr.3, **20** (1882), 113–121; Nr.4, **21** (1883), 51–58; Nr.5, **21** (1883), 545–586; Nr. 6, **23** (1884), 453–488. WA: [C 1932], 139–246.

[C 1885] Cantor, G.: *Über verschiedene Theoreme aus der Theorie der Punktmengen in einem n-fach ausgedehnten stetigen Raume* G_n. Zweite Mittheilung. Acta Mathematica **7** (1885), 105–124. WA: [C 1932], 261–276.

[C 1895–1897] Cantor, G.: *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre.* Math. Annalen **46** (1895), 481–512; **49** (1897), 207–246. WA: [C 1932], 282–356.

[C 1932] Cantor, G. : *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts.* Ed.: E. Zermelo. Springer, Berlin 1932.

[Ca 1918] Carathéodory, C.: *Vorlesungen über reelle Funktionen.* Teubner, Leipzig und Berlin 1918.

[Car 1937a] Cartan, H.: *Théorie des filtres.* Comptes rendus Acad. Sci. Paris **205** (1937), 595–598.

[Car 1937b] Cartan, H.: *Filtres et ultrafiltres.* Comptes rendus Acad. Sci. Panris **205** (1937), 777–779.

[Če 1937] Čech, E.: *Topologické prostory.* Časopis pro pěstování matematiky a fysiky **66** (1937), 225–264. Engl. Übersetzung: Čech, E.: *Topological papers*, Prague 1968, 437–472.

[Če 1966] Čech, E.: *Topological spaces* (revised ed. by Z. Frolík and M. Katětov), Wiley and Sons, London 1966.

[Ch 1998] Charatonik, J.J.: *History of continuum theory.* In: [Au/L 1997, 1998], Vol. II, 701–786.

[Che/We 1955] Chevalley, C.; Weil, A.: *Hermann Weyl 1885–1955.* L'Enseignement Mathématique **3** (1955). WA: [Weyl 1968], Bd. IV, 655–685.

[Chi 1917] Chittenden, E. W.: *On the Equivalence of Écart and Voisinage.* AMS Transactions **18** (1917), 161–166.

[Cho 1948] Choquet, G.: *Convergences.* Ann. Univ. Grenoble, Sect. Sci. Math. Phys. (NS) **24** (1948), 57–112.

[Co 1996] Corry, L.: *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures.* Birkhäuser, Basel 1996.

[Cr/Jo 1999] Crilly, T.; Johnson, D.M.: *The Emergence of Topological Dimension Theory.* In: [J 1999], 1–24.

[D 1872/1967] Dedekind, R.: *Stetigkeit und irrationale Zahlen.* Vieweg, Braunschweig 1872. 8. Aufl. DVW, Berlin 1967.

[D 1888/1967] Dedekind, R.: *Was sind und was sollen die Zahlen?* Vieweg, Braunschweig 1888. 11. Aufl. DVW, Berlin 1967.

[De/Hee 1907] Dehn, M.; Heegard, P.: *Analysis Situs.* Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, III, 1.1. Teubner, Leipzig, 153–220.

[Die 1981] Dieudonné, J.: *History of Functional Analysis.* North-Holland, Amsterdam 1981.

[Dir 1829] Dirichlet, P.G. Lejeune: *Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données.* Journal für die reine und angewandte Mathematik **4** (1829), 157–169. WA: Werke, Bd. I, G. Reimer, Berlin 1889, 117–132.

[Dir 1837] Dirichlet, P.G. Lejeune: *Über die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen.* Repertorium der Physik, I, 1837, 152–174. WA: Werke, Bd. I, G. Reimer, Berlin 1889, 133–160.

[Du 1976] Dugac, P.: *Notes et documents sur la vie et l'oevre de René Baire.* Archive for History of Exact Sciences **15** (1976), 297–383.

[E 1951] Efremovič, V.A.: *Infinitesimal spaces, (Russisch).* Doklady Akad. Nauk SSSR **76** (1951), 341–343.

[En 1989] Engelking, R.: *General Topology.* Heldermann, Berlin 1989.

[En 1998] Engelking, R.: *Kazimierz Kuratowski.* In: [Au/L 1997, 1998], Vol. II, 431–452.

[F 1928] Feigl, G.: *Geschichtliche Entwicklung der Topologie.* Jahresber. der DMV **37** (1928), 273–286.

[Fi 1981] Fisher, G.: *The Infinite and Infinitesimal Quantities of du Bois-Reymond and their Reception.* Archive for History of Exact Sciences **24** (1981), 101–163.

[Fra 1965] Franklin S. P.: *Spaces in which sequences suffice.* Fund. Math. **57** (1965), 107–115.

[Fré 1904] Fréchet, M.: *Généralisation d'un théorème de Weierstraß.* Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **139** (1904), 848–850.

[Fré 1905a] Fréchet, M.: *Sur les fonctions limites et les opérations fonctionnelles.* Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **140** (1905), 27–29.

[Fré 1905b] Fréchet, M.: *Sur les fonctions d'une infinité des variables.* Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **140** (1905), 567–568.

[Fré 1905c] Fréchet, M.: *La notion d'écart dans le calcul fonctionnel.* Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **140** (1905), 848–850.

[Fré 1906] Fréchet, M.: *Sur quelques points du calcul fonctionnel.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **22** (1906), 1–74.

[Fré 1918] Fréchet, M.: *Sur la notion de voisinage dans les ensembles abstraits.* Bull. Sci. Math. **42** (1918), 138–156.

[Fré 1928] Fréchet, M.: *Les Espaces Abstraits et leur théorie considerée comme introduction a l'analyse générale.* Gauthier-Villars, Paris 1928.

[Freu 1957] Freudenthal, H.: *Neuere Fassung des Riemann-Helmholtz-Lieschen Raumproblems.* In: Naas, J.; Schröder, K.: *Der Begriff des Raumes in der Geometrie.* Akademie-Verlag, Berlin 1957, 92–97.

[Fri 1997] Frič, R.: *History of sequential convergence spaces.* In: [Au/L 1997, 1998], Vol. I, 343–355.

[GG 1970] Grattan-Guinness, I.: *An unpublished paper by Georg Cantor: Principien einer Theorie der Ordnungstypen. Erste Mittheilung.* Acta Mathematica **124** (1970), 65–107.

[Go 1999] Gordon, C. McA.: *3-dimensional topology up to 1960.* In: [J 1999], 449–489.

[Haar/Kö 1911] Haar, A.; König, D.: *Über einfach geordnete Mengen.* Journal für die reine und angewandte Mathematik **139** (1911), 16–28.

[Had 1897] Hadamard, J.: *Sur certaines applications possibles de la théorie des ensembles.* Verhandlungen des ersten internationalen Mathematiker-Kongresses in Zürich von 9.–11. August 1897. Ed. F. Rudio, Teubner, Leipzig 1898, 201–202.

[Hahn 1913] Hahn, H.: *Über einfach geordnete Mengen.* Sitzungsber. der Kaiserl. Akademie der Wiss. in Wien. Math.-Naturwiss. Klasse, **77** (1913), 1–23.

[Hahn 1921] HAHN, H.: *Theorie der reellen Funktionen I.* Springer Verlag, Berlin 1921.

[Ha 1870/1882] HANKEL, H.: *Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen.* Gratulationsprogramm für die Universität Tübingen vom 6. 3. 1870. WA: Math. Annalen **20** (1882), 63–112, und Ostwalds Klassiker Nr. 153. W. Engelmann, Leipzig 1905, 44–102.

[Haw 1975] HAWKINS, T.: *Lebesgue's Theory of Integration. Its Origins and Development.* Chelsea Publishing Company, New York 1975.

[He 1872] HEINE, E.: *Die Elemente der Functionenlehre.* Journal für die reine und angewandte Mathematik **74** (1872), 172-188.

[Her 1967] HERRLICH, H.: *Quotienten geordneter Räume und Folgenkonvergenz.* Fund. Math. **61** (1967), 79–81.

[Heu 1986] HEUSER, H.: *Funktionalanalysis.* 2. Aufl. Teubner, Stuttgart 1986.

[Hi 1891] HILBERT, D.: *Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück.* Math. Annalen **38** (1891), 459–460.

[Hi 1899] HILBERT, D.: *Grundlagen der Geometrie.* Festschrift zur Enthüllung des Gauß-Weber-Denkmals in Göttingen. Teubner, Leipzig 1899, 1903.

[Hi 1900] HILBERT, D.: *Über den Zahlbegriff.* Jahresbericht der DMV **8** (1900), 180–184.

[Hi 1902] HILBERT, D.: *Über die Grundlagen der Geometrie.* Nachrichten der Königl. Ges. der Wiss. zu Göttingen. Math.-phys. Klasse a. d. Jahre 1902, 233–241.

[Hi 1903a] HILBERT, D.: *Über die Grundlagen der Geometrie.* Math. Annalen **56** (1903), 381–422.

[Hi 1903b] HILBERT, D.: *Über die Grundlagen der Geometrie.* Anhang IV in: *Grundlagen der Geometrie*, 2. Aufl., Teubner, Leipzig 1903, 121–162.

[Hi 1912] HILBERT, D.: *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen.* Teubner, Leipzig 1912.

[Hil 1926] HILDEBRANDT, T. H.: *The Borel Theorem and its Applications.* Bull. Amer. Math. Soc. **32** (1926), 423–474.

[Hu 1898] HURWITZ, A.: *Über die Entwickelung der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen in neuerer Zeit.* In: Verhandlungen des ersten internationalen Mathematiker-Kongresses in Zürich vom 9.–11. August 1897. Ed.: F. RUDIO, Teubner, Leipzig 1898, 91–112.

[Ja 1835] JACOBI, C. G. J.: *De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis, quibus theoria transcendentium Abelianarum innititur.* Journal für die reine und angewandte Mathematik **13** (1835), 55–78. WA: C. G. J. Jacobis Gesammelte Werke, Bd. 2. G. Reimer, Berlin 1882, 23–50.

[J 1999] JAMES, I. M. (Ed.): *History of Topology.* Elzevier, Amsterdam 1999.

[Jo 1979] JOHNSON, D. M.: *The problem of the invariance of dimension in the growth of modern topology.* Part I. Archive for History of Exact Sciences **20** (1979), 97–188.

[Jo 1981] JOHNSON, D. M.: *The problem of the invariance of dimension in the growth of modern topology.* Part II. Archive for History of Exact Sciences **25** (1981), 85–267.

[Jor 1887] JORDAN, C.: *Cours d'Analyse.* Vol. III. Gauthier-Villars, Paris 1887.

[Ju 1976] JUSCHKEWITSCH, A.P.: *The concept of function up to the middle of the 19th century.* Archive for History of Exact Sciences **16** (1976), 37–85.

[Ka/Si 1997] KATETOV, M.; SIMON, P.: *Origins of dimension theory.* In: [Au/L 1997, 1998], Vol. I, 113–134.

[K/L 1987] KECHRIS, A.S.; LOUVEAU, A.: *Descriptive Set Theory and the Structure of Sets of Uniqueness.* London Math. Soc. Lecture Note Series, Nr. 128, Cambridge 1987.

[K/L 1992] KECHRIS, A.S.; LOUVEAU, A.: *Descriptive set theory and harmonic analysis.* Journal of Symbolic Logic **57** (1992), 413–441.

[Ke 1950] KELLEY, J.L.: *Convergence in topology.* Duke Math. J. **17** (1950), 277–283.

[Ke 1955] KELLEY, J.L.: *General Topology.* Van Nostrand, Princeton 1955.

[Ki 1893] KILLING, W.: *Einführung in die Grundlagen der Geometrie.* Bd. I, Paderborn 1893.

[Kl 1872] KLEIN, F.: *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Untersuchungen.* A. Deichert, Erlangen 1872.

[Kn 1926] KNESER, H.: *Die Topologie der Mannigfaltigkeiten.* Jahresber. der DMV **34** (1926), 1–14.

[Ko/M 1997] KOETSIER, T.; MILL, J. VAN: *General topology, in particular dimension theory, in the Nederlands: the decisive influence of Brouwer's intuitionism.* In: [Au/L 1997, 1998], Vol. I, 135–180.

[Kow 1954] KOWALSKI, H.: *Limesräume und Komplettierung.* Math. Nachr. **12** (1954), 301–340.

[Kr 1997] KREYSZIG, E.: *Interaction between general topology and functional analysis.* In: [Au/L 1997, 1998], Vol. I, 357–389.

[Ku 1922] KURATOWSKI, C.: *Sur l'opération $\bar{A}$ de l'Analysis Situs.* Fund. Math **3** (1922), 182–199.

[Ku 1933] KURATOWSKI, C.: *Topologie I.* Warszawa 1933.

[La/Ro 1996] LAPTEV, B.L.; ROSENFELD, B.A.: *Geometry.* In: KOLMOGOROV, A. N.; YUSHKEVICH, A. P.: *Mathematics of the 19th Century. Geometry. Analytic Function Theory.* Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin 1996.

[Le 1902] LEBESGUE, H.: *Intégrale, Longueur, Aire.* Annali di Matematica pura ed applicata, Ser. 3, **7** (1902), 231–359.

[M 1964] MANHEIM, J. H.: *The Genesis of Point Set Topology.* Pergamon Press, Oxford 1964.

[Med 1976] MEDVEDEV, F.A.: *Die französische Schule der Funktionentheorie und Mengenlehre an der Wende vom 19. zum 20. Jahrhundert.* (Russisch). Nauka, Moskau 1976.

[Med 1991] MEDVEDEV, F.A.: *Scenes from the History of Real Functions.* Birkhäuser–Basel–Boston–Berlin 1991.

[Mo 1973] MONNA, A.F.: *Functional Analysis in Historical Perspective.* Wiley, New York–Toronto 1973.

[Mo 1975] MONNA, A.F.: *Dirichlet's Principle. A Mathematical Comedy of Errors and its Influence on the Development of Analysis.* Oosthoek, Scheltema & Holkema, Utrecht 1975.

[Moo 1910] MOORE, E. H.: *Introduction to a Form of General Analysis.* In: The New Haven Mathematical Colloquium. Yale University Press, New Haven 1910, 1–150.

[Moo/Sm 1922] MOORE, E.H.; SMITH, H.L.: *A general theory of limits.* Amer. J. Math. **44** (1922), 102–121.

[Pe 1890] PEANO, G.: *Sur une courbe, qui remplir toute une aire plane.* Math. Annalen **36** (1890), 157–160.

[Pr 1899] PRINGSHEIM, A.: *Grundlagen der allgemeinen Funktionenlehre.* Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, II, 1.1. Teubner, Leipzig 1899-1916, 1-53.

[P/I 1987] Purkert, W.; Ilgauds, H.J.: *Georg Cantor.* Birkhäuser, Basel 1987.

[Pu 1998] Purisch, S.: *A History of Results on Orderabilty and Suborderabilty.* In: [Au/L 1997, 1998], Vol. II, 689–702.

[Rei 1997] Reitberger, H.: *The contributions of L. Vietoris and H. Tietze to the foundations of general topology.* In: [Au/L 1997, 1998], Vol. I, 31–40.

[R 1854a/1867] Riemann, B.: *Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe.* Habilitationsschrift, Göttingen 1854. Posthum herausgegeben von R. Dedekind in: Abhandlungen der Königl. Ges. der Wiss. zu Göttingen **13** (1867), 227–271. WA: B. Riemann. *Gesammelte Mathematische Werke, Wissenschaftlicher Nachlaß und Nachträge.* Teubner und Springer, Berlin und Leipzig 1990, 259–303.

[R 1854b/1867] Riemann, B.: *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.* Habilitationsvortrag, Göttingen 1854. Posthum herausgegeben von R. Dedekind in: Abhandlungen der Königl. Ges. der Wiss. zu Göttingen **13** (1867), 272–287. WA: B. Riemann. *Gesammelte Mathematische Werke, Wissenschaftlicher Nachlaß und Nachträge.* Teubner und Springer, Berlin und Leipzig 1990, 304–319.

[Ri 1905] Riesz, F.: *Über mehrfache Ordnungstypen I.* Math. Annalen **61** (1905), 406–421. WA: [Ri 1960], 34–49.

[Ri 1906] Riesz, F.: *Sur les ensembles des fonctions.* Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **143** (1906), 738–741. WA: [Ri 1960], 375–377.

[Ri 1907a] Riesz, F.: *Die Genesis des Raumbegriffs.* Math. und Naturwiss. Berichte aus Ungarn **24** (1907), 309–353. WA: [Ri 1960], 110–154.

[Ri 1907b] Riesz, F.: *Sur les systèmes orthogonaux de fonctions.* Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **144** (1907), 615–619. WA: [Ri 1960], 378–381.

[Ri 1907c] Riesz, F.: *Sur une espèce de géométrie analytique des systèmes de fonctions sommables.* Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **144** (1907), 1409–1411. WA: [Ri 1960], 386–388.

[Ri 1908] Riesz, F.: *Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre.* Atti del IV. Congr. Internaz. dei Mat., Roma 2 (1908), 18–24. WA: [Ri 1960], 155–161.

[Ri 1910] Riesz, F.: *Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen.* Math. Annalen **69** (1910), 449–497. WA: [Ri 1960], 441–489.

[Ri 1913] Riesz, F.: *Les Systèmes d'Équations Linéaires a une Infinité d'Inconnus.* Gauthier-Villars, Paris 1913.

[Ri 1960] Riesz, F.: *Gesammelte Arbeiten, Bd. I.* Verlag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, Budapest 1960.

[Root 1914] ROOT, R. E.: *Iterated limits in general analysis.* American Journal of Math. **36** (1914), 79–133.

[Ru 1903] RUSSELL, B.: *The Principles of Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge 1903.

[S 1963] SALEM, R.: *Algebraic Numbers and Fourier Analysis.* Heath & Co., Boston 1963.

[Schm 1907] SCHMIDT, E.: *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen.* Math. Annalen **63** (1907), 433–476.

[Schm 1908] SCHMIDT, E.: *Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **25** (1908), 53–77.

[Sch 1900] SCHOENFLIES, A.: *Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten.* Jahresbericht der DMV **8** (1900), H.2, 1–250.

[Sch 1906] SCHOENFLIES, A.: *Beiträge zur Theorie der Punktmengen.* Mathematische Annalen **62** (1906), 319–328.

[Sch 1908] SCHOENFLIES, A.: *Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten.* Teil II. Ergänzungsband 2 zum Jahresbericht der DMV, Teubner, Leipzig 1908.

[Scho 1980] SCHOLZ, E.: *Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs von Riemann bis Poincaré.* Birkhäuser, Boston–Basel–Stuttgart 1980.

[Scho 1996] SCHOLZ, E.: *Logische Ordnungen im Chaos: Hausdorffs frühe Beiträge zur Mengenlehre.* In: BRIESKORN, E. (Ed.): *Felix Hausdorff zum Gedächtnis. Aspekte seines Werkes.* Vieweg, Braunschweig–Wiesbaden 1996, 107–134.

[Scho 1999] SCHOLZ, E.: *The concept of manifold, 1850–1950.* In: [J 1999], 25–64.

[Scho 2000] SCHOLZ, E.: *Weyls Infinitesimalgeometrie, 1917–1925.* In: *Hermann Weyl's "Raum Zeit Materie" and a General Introduction to His Scientific Work.* Ed.: E. SCHOLZ. Birkhäuser, Basel 2000.

[Sh 1998] SHORE, S. D.: *From developments to developable spaces.* In: [Au/L 1997, 1998], Vol. II, 467–540.

[SiS 1982] SIEGMUND-SCHULTZE, R.: *Die Anfänge der Funktionalanalysis und ihr Platz im Umwälzungsprozeß der Mathematik um 1900.* Archive for History of Exact Sciences **26** (1982), 13–71.

[SiS 1998] SIEGMUND-SCHULTZE, R.: *Eliakim Hastings Moore's "General Analysis".* Archive for History of Exact Sciences **52** (1998), 51–89.

[Si 1927] Sierpiński, W.: *La notion de dérivée comme base d'une théorie des ensembles abstraits.* Math. Annalen **97** (1927), 321–337.

[Tay 1982] Taylor, A. E.: *A Study of Maurice Fréchet: I. His Early Work on Point Set Theory and the Theory of Functionals.* Archive for History of Exact Sciences **27** (1982), 233–295.

[Tay 1985] Taylor, A. E.: *A Study of Maurice Fréchet: II. Mainly about his Work on General Topology*, 1909-1928. Archive for History of Exact Sciences **34** (1985), 279–380.

[Tay 1987] Taylor, A. E.: *A Study of Maurice Fréchet: III. Fréchet as Analyst*, 1909–1930. Archive for History of Exact Sciences **37** (1987), 25–76.

[Th 1966] Thron, W. J.: *Topological Structures.* Holt, Rinehard and Winston, New York 1966.

[Th 1997] Thron, W. J.: *Frederic Riesz' contributions to the foundations of general topology.* In: [Au/L 1997, 1998], Vol. I, 21–29.

[T 1908] Tietze, H.: *Über topologische Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten.* Monatshefte für Mathematik und Physik **19** (1908), 1–118.

[T 1923] Tietze, H.: *Beiträge zur allgemeinen Topologie I. Axiome für verschiedene Fassungen des Umgebungsbegriffs.* Math. Annalen **88** (1923), 290–312.

[T/V 1930] Tietze, H.; Vietoris, L.: *Beziehungen zwischen den verschiedenen Zweigen der Topologie.* Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, III, 1.2. (H. 10). Teubner, Leipzig 1914–1931, 141–237.

[To 1984] Toretti, R.: *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré.* Reidel, Dordrecht 1984.

[Ul 2003] Ullrich, P.: *Einige historische Anmerkungen zur Unterscheidung von Infimum und Minimum.* Tagungsband der 5. Tagung der Fachsektion Geschichte der Mathematik in der DMV (erscheint 2003).

[U 1926] Urysohn, P.: *Sur les classes $(\mathcal{L})$ de M. Fréchet.* Enseign. Math. **25** (1926), 77–83.

[V 1921] Vietoris, L.: *Stetige Mengen.* Monatshefte f. Math. u. Physik **31** (1921), 173–204.

[VeWh 1931] Veblen, O.; Whitehead, J. H.: *A set of axioms for differential geometry.* Proc. Nat. Acad. of Sciences **17** (1931), 551–561. WA: Whitehead, J. H.: *Mathematical Works*, Vol. I, 93–104.

[VeWh 1932] VEBLEN, O.; WHITEHEAD, J. H.: *The Foundations of Differential Geometry.* Cambridge Univ. Press, London 1932.

[Vo 1887] VOLTERRA, V.: *Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni.* Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, Ser. 4, **3** (1887), 97–105.

[W 1875/76] WEIERSTRASS, K.: *Vorlesungen über die Theorie der Abelschen Transzendenten.* Univ. Berlin, WS 1875/76, SS 1876. Mitschrift von G. HETTNER und J. KNOBLAUCH. In: [W 1894–1927], Bd.4, 1–624.

[W 1878] WEIERSTRASS, K.: *Theorie der analytischen Functionen.* Vorlesung Univ. Berlin, Sommersemester 1878. Ausgearbeitet von F. RUDIO. Hs. Ms, Bibl. des Math. Instituts der Universität Leipzig; auch Humboldt-Univ. Berlin.

[W 1880] WEIERSTRASS, K.: *Zur Functionenlehre.* Monatsberichte der Akademie der Wiss. zu Berlin **2** (1880), 719–743. WA: [W 1894–1927], Bd. 2, 201–223.

[W 1886] WEIERSTRASS, K.: *Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre.* Vorlesung Univ. Berlin, Sommersemester 1886. In: Teubner-Archiv zur Mathematik (Ed.: R. SIEGMUND-SCHULTZE). Teubner, Leipzig 1988.

[W 1894–1927] WEIERSTRASS, K.: *Mathematische Werke.* Ed.: G. HETTNER, J. KNOBLAUCH, R. ROTHE. 7 Bände, Berlin 1894–1927.

[Weyl 1913] WEYL, H.: *Die Idee der Riemannschen Fläche.* Teubner, Leipzig 1913, 1923, 1955, 1997.

[Weyl 1944] WEYL, H.: *David Hilbert and his mathematical work.* Bulletin of the American Mathematical Society **50** (1944), 612–654. WA: [Weyl 1968], Bd. IV, 130–172.

[Weyl 1968] WEYL, H.: *Gesammelte Abhandlungen.* Ed.: K. CHADRASEKHARAN. 4 Bände, Springer, Berlin etc. 1968.

[Wi 1982] WILDER, R. L.: *The mathematical work of R. L. Moore: its background, nature, and influence.* Archive for History of Exact Sciences **26** (1982), 73–97.

[Wy 1996] WYLER, O.: *Convergence axioms for topology.* Annals New York Acad. Sci. (1996), 465–475.

[YY 1906] YOUNG, W. H.; YOUNG, G. C.: *The Theory of Sets of Points.* University Press, Cambridge 1906.

[Z/Ro 1923] ZORETTI, L.; ROSENTHAL, A.: *II C 9a: Die Punktmengen.* Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften II, 3.2. Teubner, Leipzig 1923–1927, 855–1030.